

Destaques:

Dependência Linear

$S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$; V esp. vet. sobre $\mathbb{K}$

S é Linearmente Independente (L.I.) se e somente se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Casos particulares:

- $\mathbf{0} \in S \Rightarrow S$ é L.D.

- $S = \{v_1\}, v_1 \neq \mathbf{0} \Rightarrow S$ é L.I.

- $S = \{v_1, v_2\}, v_1 = \lambda v_2 \Rightarrow S$ é L.D.
 $(\lambda \in \mathbb{K}) \quad v_1 \neq \lambda v_2 \Rightarrow S$ é L.I.

- $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e

$S_1 = \{v_2, v_3\}$ por ex, e S_1 é L.D.
 então S é L.D.

- Bases:

Seja $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$

L_S Se B é gerador de V , ou seja $V = [B] = \text{span}(B) = \text{ger}(B)$

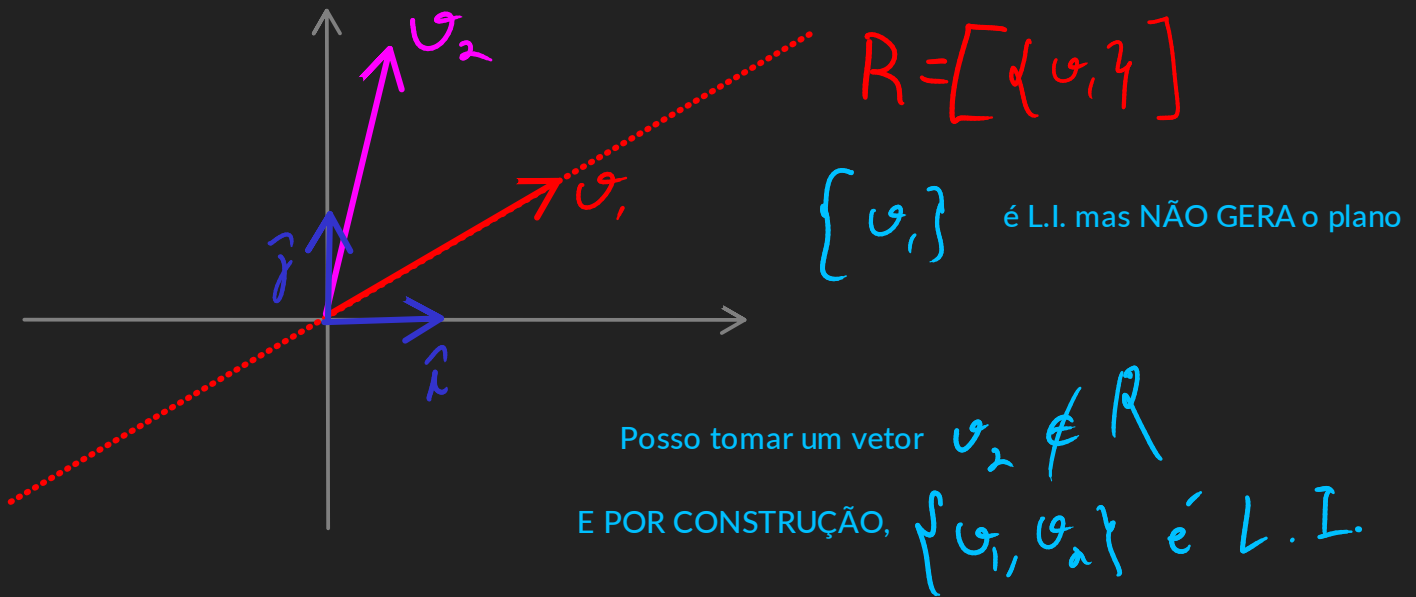
E B é L.I. então B é BASE de V .

↳ $\uparrow$ e or em:

Toda base de um espaço vetorial V , finitamente gerado, possui o mesmo número de vetores: esse número é a DIMENSÃO de V .

Devido a duas ideias:

- 1) Num esp. vetorial finitamente gerado, NENHUM conjunto L.I tem mais vetores que uma base
- 2) Se um conjunto L.I tem menos vetores que uma base de V , esse conj NÃO GERA o espaço V .



Verificamos que $\{v_1, v_2\}$ GERAM o plano.

Logo $\{v_1, v_2\}$ é Base do plano.

Exemplo:

Verifique se no espaço M_{22} o seguinte conjunto é L.I.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$M_{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C é base canônica de $M_{2 \times 2}$

$$\dim(M_{2 \times 2}) = 4$$

$$\dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

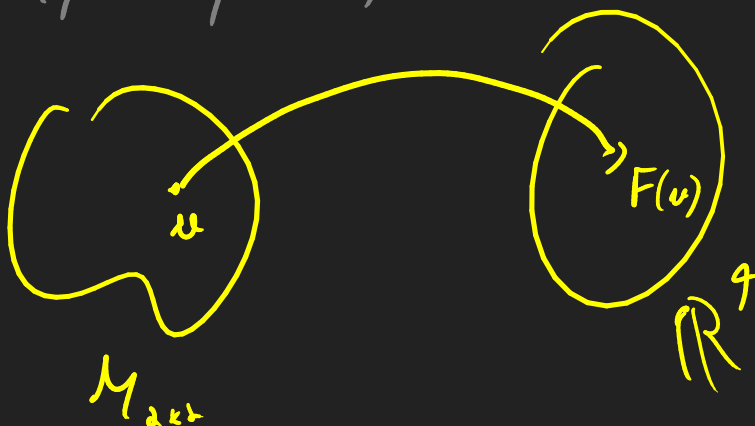
$$\dim(P_3(\mathbb{R})) = 4$$

$$a + bt + ct^2 + dt^3 \in P_3$$

→ mesma dimensão

ISOMORFOS

$\{1, t, t^2, t^3\}$ é base de P_3



$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, b, c, d)$$

$$G\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (2a, -5c, 3b, d)$$

iso $\rightarrow$ $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Plano $xy: \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \}$

$\hookrightarrow \dim = 2$.
 $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ 2 vetores

Exemplo:

Verifique se no espaço M_{22} o seguinte conjunto é L.I.

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$$

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \mathbb{O}$$

$$\left[\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

EQUAÇÃO VETORIAL

$$\begin{pmatrix} \underline{2\alpha + \beta} & \underline{\alpha + \gamma} \\ \underline{\alpha + \beta - \gamma} & \underline{2\beta + 4\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

3 inc

4 eq.

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha \\ \alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\alpha \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha - 2\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ 2\beta - 4\gamma = 0 \Rightarrow 2(-2\alpha) - 4(-\alpha) = 0 \Rightarrow -4\alpha + 4\alpha = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$\beta = 2\gamma$

α é variável livre.

existe $\alpha \neq 0$ que satisfaz a cond.

0 conj. o L.D.

Ex.:

No espaço vetorial das funções contínuas, determine se o conj a seguir é L.I.

⌋ não é finitamente gerado

$$S = \{ \sin(t), \cos(t), t \}$$

$$0 = f(t) = 0$$

$$\alpha \sin(t) + \beta \cos(t) + \gamma t = 0$$

equação vetorial, deve valer para todo t

Logo $\{\sin(t), \cos(t), t\}$ é L.I.

Equações diferenciais: WRONSKIANO