Seja V espaço vetorial sobre os ℝ, dotado de produto interno (V é espaço euclidiano)

$B: \{u_1, \dots, u_n\}$ base ortonormal de V

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

→ norma 1

→ ortogonais

Propriedades: sejam v, w vetores de V

$$[v]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_B \qquad [w]_B = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_B$$

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_i v_i u_i , \sum_j w_j u_j \right\rangle$$

$$= \sum_i v_i \left\langle u_i , \sum_j w_j u_j \right\rangle$$

$$= \sum_i v_i \left(\sum_j w_j \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{\delta_{ij}} \right)$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i$$

produto interno usual em $\mathbb{R}^n$
(produto escalar)

$$= v_1 w_1 + v_1 w_2 + \dots + v_n w_n$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = [v]^T [w]$$

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \Rightarrow v = v_1 u_1 + v_1 u_2 + \dots + v_n u_n$$

$$v_1 = \langle u_1, v \rangle \quad \rightarrow \quad \text{Coeficientes de Fourier}$$

$$v_2 = \langle u_2, v \rangle \quad \dots$$

Operador: $T : V \to V$ $\qquad$ B, base ortonormal

Se $[T]_B = \left([T]_B\right)^T$ dizemos que T é um OPERADOR AUTOADJUNTO

Operador adjunto.

T^* é op. adjunto de T

se $\langle T^*(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$ para todos $v, w \in V$

Note $(T^*)^* = T$

$$[T^*] = [T]^T \; :$$

$$\langle v, T(w) \rangle = [v]^T [T(w)]$$
$$= [v]^T [T] [w]$$
$$= \left([v]^T [T]\right) [w]$$
$$= \left([T]^T [v]\right)^T [w]$$
$$= [T^*(v)]^T [w]$$

$(AB)^T = B^T A^T$

$(A^T B)^T = B^T (A^T)^T$
$= B^T A$

$B = [v]$

$A = [T]$

$$\langle v, T(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle$$

$$T^* \text{ é adjunto de } T \iff [T^*] = [T]^T$$

Se T é autoadjunto,

$$[T]^T = [T] \Rightarrow T^* = T$$

Nota: caso complexo:

T é autoadjunto $\iff [T]^\dagger = [T]$

$$[T] = \left(\overline{[T]}\right)^T$$

Operadores ORTOGONAIS/UNITÁRIOS/NORMAIS

Matrizes ortogonais (Reais)

Matriz A é ortogonal se

$$A\,A^T = \mathbb{1}$$

$$A^T = A^{-1}$$

Caso complexo:

Matriz A é unitária s.s.s.

$$A\,A^\dagger = \mathbb{1}$$

$$A^\dagger = A^{-1}$$

Propriedades

- Se A é uma matriz ortogonal, suas colunas formam um conjunto ortonormal de vetores. O mesmo vale para as linhas

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} — & v_1 & — \\ — & v_2 & — \\ & \vdots & \\ — & v_n & — \end{bmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = [v_1]^T [v_2] = 0$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = [v_1]^T [v_1] = 1$$

$$A A^T = \begin{bmatrix} \underbrace{[v_1]^T [v_1]}_{\to 1} & \underbrace{[v_2]^T [v_1]}_{\to 0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \; \ddots \end{bmatrix}$$

- Se A é ortogonal/unitária, $\det(A) = \pm 1$

$$A A^T = \mathbb{1}$$

$$\det(A A^T) = \det(\mathbb{1})$$

$$\det(A)\det(A^T) = 1 \qquad \det(A^T) = \det(A)$$

$$(\det(A))^2 = 1$$

$$\det(A) = \pm 1$$

OPERADOR ORTOGONAL

T: É OPERADOR ORTOGONAL SE E SOMENTE SE

$[T]_B$ for ortogonal numa base B ortonormal

- Todo operador ortogonal/unitário leva uma base ortonormal de V a outra base ortonormal.

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormal

$\hookrightarrow$ n vetores

$$[T]_B = \left[[T(u_1)]\ [T(u_2)]\ \dots\ [T(u_n)] \right]$$

ortonormais $\to$ L.I. $\to$ Base de V
n vetores

- Todo operador ortogonal é um isomorfismo, ou seja, uma transformação bijetora.

Teorema núcleo-imagem $\quad T: V \to V$

$$\dim(D(T)) = \dim(CD(T))$$

$$T(B) = \{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\}$$

é gerador de Im(T), e é ortonormal, logo LI, portanto BASE de Im(T).
n vetores -> dim(Im(T)) =n

$$\underbrace{\dim(Im(T))}_{n} + \underbrace{\dim(Ker(T))}_{0} = \underbrace{\dim(D(T))}_{n}$$

Logo T é injetora

e sobrejetora: $\dim(Im(T)) = \dim(CD(T))$.

Logo ISOMORFISMO $\iff$ inversível

- T ortogonal $\Rightarrow$ $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$

para quaisquer v, w $\in$ V

preserva ângulos

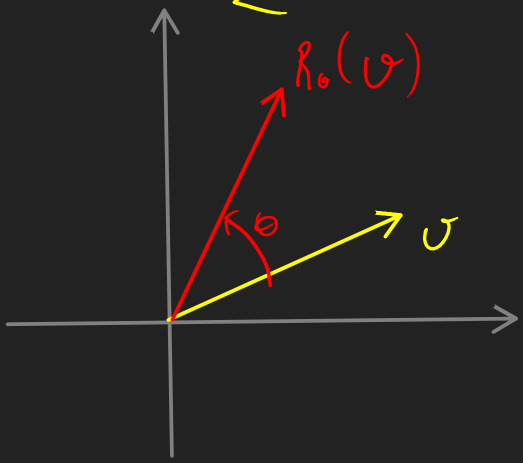
$\to$ Preserva normas $\quad \|T(v)\| = \|v\|$. ISOMETRIA

Transformações ortogonais são transformações RÍGIDAS, não deformam figuras.

Exemplo:

$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na base canônica

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Esse operador é ortogonal.

$$[R_\theta][R_\theta]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta & \cos\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta \\ \text{sen}\,\theta\cos\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

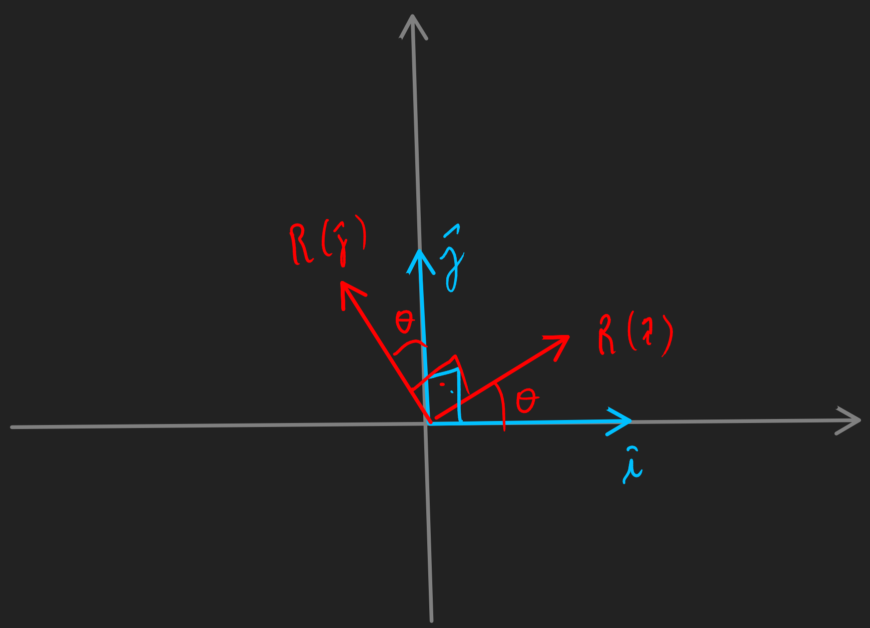
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ✓ ortogonal!

$v = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta) \Rightarrow [v] = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \end{bmatrix}$

$w = (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta) \Rightarrow [w] = \begin{bmatrix} -\text{sen}\,\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

$\langle v, w \rangle = 0, \qquad \langle v, v \rangle = 1$

$\langle w, w \rangle = 1$



$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$