Notas de aula ECT2202 T04 2021-06-17 Aulas 02-03 — Subespaços e Comb. Lineares

Considere o espaço vetorial $\boxed{V} = \mathbb{R}^3$. Assinale verdadeiro ou falso:

( ) $\mathbb{R}^2$ é subespaço de V
( ) o plano xz dado por $S = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de V
( ) o plano $x = 1 + z$ não é subespaço de V pois não contém o vetor nulo
( ) o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ não é subespaço de V pois não é um conjunto fechado por multiplicação por escalar
( ) o conjunto $S = \{(x, y, z) | z \geqslant 0\}$ é subespaço vetorial de V
( ) A esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ é subespaço de V

$$\mathbb{R}^3 = \{ v = (x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}$$

(F) $\mathbb{R}^2$ é subespaço de V

$\mathbb{R}^2 \not\subset \mathbb{R}^3$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$S \subset V$

S é subespaço de V se e somente se for um espaço vetorial.

S é subconj. de V.

( ) o plano xz dado por $S = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de V

$S \subset \mathbb{R}^3$ ✓

10 axiomas.

Como $S \subset V$, basta testar:
0) Vetor Nulo : $(0, 0, 0) \in S$ ✓
1) Fechamento por adição
2) Fech. por multiplicação por escalar.

1) Adição:
$u = (x, 0, z) \in S$
$v = (a, 0, b) \in S$

$u + v \in S$?

$u + v = (x, 0, z) + (a, 0, b)$

$(x + a, 0 + 0, z + b)$

$(\underbrace{x + a}_{\in \mathbb{R}}, 0, \underbrace{z + b}_{\in \mathbb{R}}) \in S$ ✓.

Logo S é fechado por adição. ✓

2) Fech. multiplicação por escalar

$u = (x, 0, z) \in S.$

$\alpha u \in S$? com $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha u = \alpha (x, 0, z)$

$= (\underbrace{\alpha x}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{0}_{0}, \underbrace{\alpha z}_{\in \mathbb{R}}) \in S$ ✓.

Logo S é fechado por mult. por escalar. ✓

Então S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$

(F) O conjunto $S = \{(x, y, z) | z \geqslant 0\}$ é subespaço vetorial de V

$S = \{(x, y, z) \mid z \geq 0\}$

0) Vetor nulo $(0, 0, 0) \in S$
1) fech. Adição
2) Fech. mult. escalar.

1) $u = (x, y, z) \in S \quad (z \geq 0)$

$v = (a, b, c) \in S \quad (c \geq 0)$

$u + v = (\underbrace{x + a}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{y + b}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{z + c})$

$z + c \geq 0$?

$z \geq 0$ e $c \geq 0$

então $z + c \geq 0$ ✓.

S é fechado por adição

2) $u = (x, y, z) \in S \quad (z \geq 0)$

$\alpha u \in S$?

$\alpha u = \alpha(x, y, z)$

$= (\underbrace{\alpha x}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\alpha y}_{\in \mathbb{R}}, \alpha z) \hookrightarrow \alpha z \geq 0 \Rightarrow \boxed{\alpha \geq 0}$

Restrição

Contraexemplo: $-2(1,3,5) = (-2, -6, -10) \notin S$.

Logo, S não é fechado por mult. por escalar.

(V) o plano $\mathbf{x} = 1 + \mathbf{z}$ não é subespaço de $\mathbf{V}$ pois não contém o vetor nulo

$(1+z, y, z) \neq (0,0,0)$

(V) o cilindro $\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1$ não é subespaço de $\mathbf{V}$ pois não é um conjunto fechado por multiplicação por escalar

$u = (x, y, z) \qquad x^2 + y^2 = 1$

$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2 = \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 =$

$= \alpha^2 \underbrace{(x^2 + y^2)}_{1} = \alpha^2 \neq 1$

$v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$

$2v = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \Rightarrow \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 \neq 1$

$2v \notin$ cilindro.

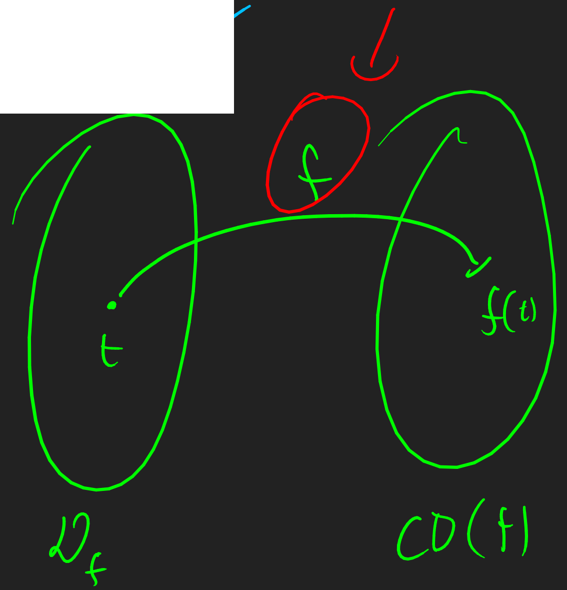
4. Seja W o subconjunto de todos os vetores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbb{R}^5$ que satisfazem

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Obtenha um conjunto finito de vetores que gera W.

de

2) Fech. por mult. por escalar



$f(t) = 0$ é par

$f(-t) = f(t) = 0$

1) Adição:

$f(t)$ é par — é dado que $f(-t) = f(t)$

$g(t)$ é par — $g(-t) = g(t)$

$(f+g)$ é par?

$(f+g)(-t) \overset{?}{=} (f+g)(t)$

$f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t) = (f+g)(t)$

funções pares

Logo (f+g) é função par. Portanto o conjunto é fechado por adição.

2) mult por escalar:

f, função par: $f(-t) = f(t)$

αf é par?

$(\alpha f)(-t) = (\alpha f)(t)$

par

$\alpha(f(-t)) = \alpha(f(t)) = (\alpha f)(t)$

Logo αf é função par (para todo α) logo o conj.. é fechado por mult. por escalar.

Portanto o conj das funções pares é subespaço vetorial do esp. das funções reais.

4. Seja W o subconjunto de todos os vetores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbb{R}^5$ que satisfazem

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Obtenha um conjunto finito de vetores que gera W.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

2 variáveis Livres.

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + \quad - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_2 + \quad -3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + \quad - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

x_5 var. livre, x_4 var. livre

x_3 var. livre

$$\begin{cases} x_2 = -x_4 + 2x_5 \\ x_1 = -\frac{2}{3}x_3 + x_5 \end{cases}$$

$$w = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$w = \left(-\frac{2}{3}x_3 + x_5, -x_4 + 2x_5, x_3, x_4, x_5\right) \in W$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x_3, 0, x_3, 0, 0\right) +$$

$$+ (0, -x_4, 0, x_4, 0) +$$

$$+ (x_5, 2x_5, 0, 0, x_5) = w \in W$$

$$= x_3 \underbrace{\left(-\frac{2}{3}, 0, 1, 0, 0\right)}_{v_1} + x_4 \underbrace{(0, -1, 0, 1, 0)}_{v_2} + x_5 \underbrace{(1, 2, 0, 0, 1)}_{v_3}$$

$$W = \{ x_3 v_1 + x_4 v_2 + x_5 v_3 \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \}$$

$$W = [(-2/3, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 0, 1)]$$

$$W = \operatorname{span}(\{(-2/3, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 0, 1)\})$$