Notas de aula ECT2202 T05 2021-06-17 Aulas 02-03 — Subespaços e Comb. Lineares

4. Seja W o subconjunto de todos os vetores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbb{R}^5$ que satisfazem

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \right\} \to \text{Terei variáveis livres}$$

Obtenha um conjunto finito de vetores que gera W.

$$W = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \left\{ x_1 + x_2 + \tfrac{4}{3}x_3 \dots \right\} \right\}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow \boxed{L_2 - L_1}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -4x_2 - 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ \left(-2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right)\right)x_3 - 8x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$-2 - \frac{8}{3} = -\frac{6}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{14}{3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -\frac{14}{3}x_3 - 8x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

x_4 e x_5 vari ávelis livres.

$$\begin{cases} x_3 = \frac{-3}{14}(8x_4 + 5x_5) \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 = -x_2 - \frac{4}{3}x_3 + x_4 \end{cases}$$

$x_3 = f_1(x_4, x_5)$

$x_2 = f_2(x_4, x_5)$

$x_1 = f_1(x_4, x_5)$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$\left(-x_2 \ldots, -\frac{2}{3}x_3(x_4,x_5) + x_4 - x_5, \frac{-3}{14}(8x_4 + 5x_5), x_4, x_5\right) \in W$$

$$w = x_4\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 1, 0)}_{w_1} + x_5\underbrace{(\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0, 1)}_{w_2}$$

$$W = [(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 1, 0), (\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0, 1)]$$

$$W = \text{span}((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 1, 0), (\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0, 1))$$

Considere o espaço vetorial $\mathrm{V} = \mathrm{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios reais. Assinale verdadeiro ou falso:

(V) $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$, o conjunto dos polinômios de grau $\leqslant 2$ é subespaço de V
( ) O conjunto das funções cujos cujos gráficos são retas não são subespaço de V por não satisfazer o fechamento por adição.
( ) O conjunto dos polinômios de grau igual a 3 não é subespaço de V pois não contém o vetor nulo
( ) O conjunto dos polinômios $\mathrm{p(x)}$ tais que $\mathrm{p}(0) = 2$ não é subespaço de V pois não é um conjunto fechado por multiplicação por escalar
( ) O conjunto dos polinômios $\mathrm{p(x)}$ tais que $\left.\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}}\right|_{\mathrm{x}=0} = 1$ é subespaço vetorial de V

$P(\mathbb{R})$: $\quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k \quad \alpha, t \in \mathbb{R}$

$P_2(\mathbb{R})$ grau ≤ 2 é subespaço.

$v \in P_2(\mathbb{R}) \iff v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

Axiomas fechamento:

1) Adição:

$$\begin{aligned} & v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ + \; & u(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \\ \hline & u + v = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) t + (a_2 + b_2) t^2 \in P_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

2) $\alpha v(t) = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2 \in P_2(\mathbb{R})$

Logo $P_2(\mathbb{R})$ é subesp. de $P(\mathbb{R})$

(F) O conjunto das funções cujos cujos gráficos são retas não são subespaço de V por não satisfazer o fechamento por adição.

$$f(t) = a_0 + a_1 t \in P_1(\mathbb{R}) \text{ é sub. } P(\mathbb{R})$$

(V) O conjunto dos polinômios de grau igual a 3 não é subespaço de V pois não contém o vetor nulo

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad a_3 \neq 0$$

$$p(t) \neq 0.$$

(V) O conjunto dos polinômios $\mathrm{p}(\mathrm{x})$ tais que $\mathrm{p}(0) = 2$ não é subespaço de V pois não é um conjunto fechado por multiplicação por escalar

C

Seja $p(x)$ t.q. $p(0) = 2$.

$\alpha p(0) = 2\alpha \neq 2$ Logo

$\alpha p(0) \notin C$.

$$g(x) = \alpha p(x) \Rightarrow g(0) = \alpha p(0) = \alpha 2.$$

$$g(x) \notin C \iff g(0) \neq 2$$

(F) O conjunto dos polinômios $\mathrm{p}(\mathrm{x})$ tais que $\left.\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}}\right|_{\mathrm{x}=0} = 1$ é subespaço vetorial de V

$$p(x) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

$$\frac{dp}{dx} = a_1 + 2 a_2 t + \cdots$$

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0} = a_1$$

Logo $\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0} = 1 \Rightarrow a_1 = 1.$

Se $a_1 = 1$ então $p(x) = 0$ não está no conjunto

$p(x) = 0$ satisfaz?

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0} = 0 \neq 1 \text{. NÃO.}$$

2. Seja V o espaço vetorial de todas as funções reais: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quais conjuntos de funções abaixo são subespaços de V?

a) Todas as funções pares: f(-t) = f(t)

Testar: vetor nulo, fechamento por adição, fechamento por mult. escalar

$$\left.\begin{aligned} \emptyset = f(t) &= 0 \\ f(-t) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{par.} \quad ✓$$

Fech. adição.

$f(t)$ t.q. $f(-t) = f(t)$

$g(t)$ t.q. $g(-t) = g(t)$ ∈

$(f+g)(t)$ é par?

$(f+g)(-t) \stackrel{?}{=} (f+g)(t)$?

$f(-t)+g(-t) = f(t)+g(t) = (f+g)(t)$. ✓

par!

Esse conj. é fechado por adição ✓

Fechamento por mult. escalar

$f(t)$ t.q. $f(-t) = f(t)$

$\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{(\alpha f)(t)}$ é par?

$\boxed{(\alpha f)(-t) \stackrel{?}{=} (\alpha f)(t)}$

$\boxed{\alpha(f(-t))} = \alpha(f(t)) = (\alpha f)(t)$ ✓

par.

As funções pares são conj. fechado por mult. por escalar. ✓

Logo trata-se de subespaço vetorial das funções.

3. Mostre que o conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas é um subespaço vetorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
NOTA: Uma matriz A é simétrica se for igual à sua transposta, ou seja, $A^T = A$.

$$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \iff A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

0) Vetor nulo: $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

é simétrica.

1) Fech. Adição:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{nn} \end{bmatrix} = [b_{ij}]$$

Mostrar que $(A+B)^T = (A+B)$

Efetuar:

$$(A+B)^T = A^T + B^T \overset{\text{simétricas}}{=} A + B \quad \checkmark.$$

Alternativa:

$A = [a_{ij}]$ simétrica: $\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$

$B = [b_{ij}]$ $b_{ij} = b_{ji}$

$A+B = [a_{ij} + b_{ij}]$ testar:

$(a_{ij} + b_{ij}) \stackrel{?}{=} (a_{ji} + b_{ji})$

$a_{ij} = a_{ji}$
$\Rightarrow a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$ ✓
$b_{ij} = b_{ji}$

Logo $A+B$ é simétrica.

Multiplicação por escalar: EXERCÍCIO

αA é simétrica?