

Pontos principais:

- Dependência Linear:

$S = \{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (L.I.) se e somente se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$\hookrightarrow$ Se $0 \in S \Rightarrow S$ é L.D.

Se não

Se $S = \{v_1\}$ $v_1 \neq 0 \Rightarrow S$ é L.I.

Se $S = \{v_1, v_2\}$ e $v_1 = \lambda v_2$
então S é L.D.

Bases e Dimensão

$B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, esp. vet. sobre K .

B é BASE de V se e somente se

- $\rightarrow$ a) B é gerador de V , ou seja, $V = [B] = \text{span}(B) = \text{ger}(B)$
- $\rightarrow$ b) B é L.I.

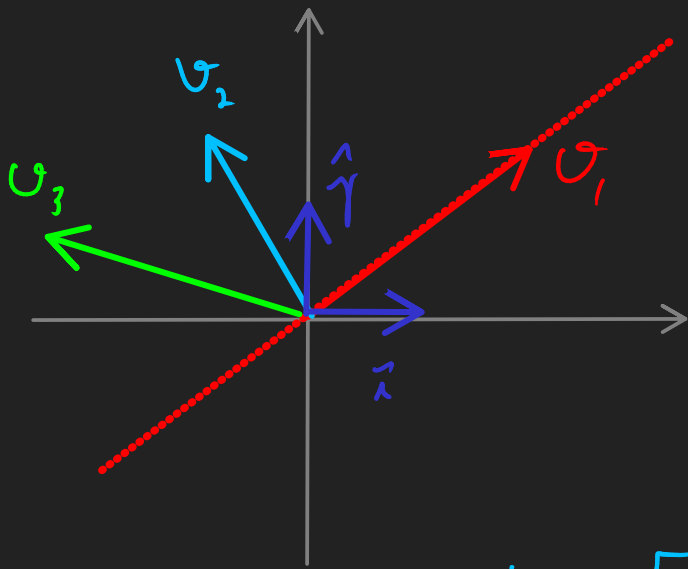
Dimensão:

Dado esp. vetorial V finitamente gerado, TODA BASE de V terá o mesmo número de vetores. Esse número é a dimensão de V .

Pois:

No espaço V com $\dim(V) = n$:

- 1) Todo conjunto gerador de V tem n ou mais elementos $\leftarrow$
- 2) Todo conjunto L.I. tem no máximo n elementos $\leftarrow$



$$R = [\{v_i\}]$$

$$v_i \neq 0$$

$\{v_i\}$ é L.I.

Não gera o plano

$$\text{plano: } [\{v_1, v_2\}]$$

$$[\{x_1, x_2\}]$$

$\{v_1, v_2\}$ é base do plano

Exemplo: base e dimensão:

Determine quais conjuntos abaixo são bases do $\mathbb{R}^3$. Qual a dimensão de $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0)\}$

b) $\{(1, 1, 1), (1, -1, 5)\}$

c) $\{(1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2)\}$

a) $\{(1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0)\} = A$

Testar se

- A é L.I.

- A é gerador de V

A é L.I.?

$$\left\{ \underset{v_1}{(1, 2, 3)}, \underset{v_2}{(1, 0, -1)}, \underset{v_3}{(3, -1, 0)} \right\} = A$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\alpha (1, 2, 3) + \beta (1, 0, -1) + \gamma (3, -1, 0) = (0, 0, 0)$$

equação vetorial

$$(\alpha + \beta + 3\gamma, 2\alpha - \gamma, 3\alpha - \beta) = (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})$$

$$3 \text{ eq } \begin{cases} \overbrace{\alpha + \beta + 3\gamma}^{3 \text{ inc}} = 0 \\ 2\alpha - \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Possível e determinado.} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ -2\beta - 7\gamma = 0 \\ -4\beta - 9\gamma = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 & \alpha = 0 \\ -2\beta - 7\gamma = 0 & -2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ 5\gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Logo todo (x, y, z) é comb. linear
de v_1, v_2, v_3

A é gerador de $\mathbb{R}^3$ ✓

Logo A é BASE de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{e } \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$C = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$$

base canônica de $\mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$b) \{ (1, 1, 1), (1, -1, 5) \} = B$$

Não é base de $\mathbb{R}^3$ pois possui 2 elementos e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

B é L.I.?

$$(1, -1, 5) \neq \lambda (1, 1, 1) \Rightarrow \text{SIM.}$$

Alternativas nente:

$$\alpha (1, 1, 1) + \beta (1, -1, 5) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 & \Rightarrow \alpha = -\beta \\ \alpha - \beta = 0 & \Rightarrow \alpha = \beta \\ \alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \alpha = -\beta \\ \alpha = \beta \end{matrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \text{L.I.}$$

B generates $\mathbb{R}^3$?

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -1, 5) = (x, y, z)$$

dim(V)
3 eq.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \\ \alpha + 5\beta = z \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -2\beta = y - x \\ 4\beta = z - x \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -2\beta = y - x \\ 0 = z - x + 2(y - x) = z - 3x + 2y \end{cases}$$

$$c) \{ (1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2) \} = D$$

D não é base de $\mathbb{R}^3$ pois possui 4 elementos e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

D é L.D. pois contém mais vetores que a dimensão do espaço

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(3, -1, 0) + \delta(2, 1, -2) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{matrix} \text{4 eq.} \\ \left[\begin{array}{cccc} \alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta = 0 \\ 2\alpha - \gamma + \delta = 0 \\ 3\alpha - \beta - 2\delta = 0 \end{array} \right. \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & + \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{lin. (2)} \end{bmatrix}$$

↑ variável livre.

$\forall \delta \in \mathbb{R}$ existe solução t.q.

$$\alpha v_1 + \dots + \delta v_4 = 0$$

3 vetores

$$\{ (1, 0, 0), (1, -1, 1), v \} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$$v = (\cancel{x}, \cancel{y}, \cancel{z})$$

Basta que seja L.I.

$$\rightarrow \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, -1, 1) + \gamma(\cancel{x}, \cancel{y}, \cancel{z}) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + x \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

possible
determined

$$\alpha(a+bt+ct^2) + \beta(1-t^2) + \gamma(1+2t-t^2) = 0$$