

Esta lista se refere ao conteúdo das aulas

- Aula 11 Transformações
- Aula 12 Transformações lineares
- Aula 13 Transformações lineares II
- Aula 14 Núcleo e Imagem
- Aula 15 Álgebra de Transformações lineares

Verifique as instruções sobre a atividade na página da disciplina. Envie as resoluções das questões pedidas na página de instruções pelo Formulário do Google.

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela expressão

$$T(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}) = (x - y, 5y - 3x) \leftarrow$$

- (f) Para quais valores de α e β temos $T(\alpha, \beta) = (5, -3)$? Você terá que calcular a expressão para $T(\alpha, \beta)$, igualar a $(5, -3)$ e resolver o sistema linear para obter α e β . Com isso você calculou a transformação inversa: $T^{-1}(5, -3) = (\alpha, \beta)$.
- (g) Faça o mesmo procedimento do item anterior, mas a fim de obter a expressão geral $T^{-1}(x, y)$.
- (h) Calcule $T^{-1}(37, 42)$.

$$T(\alpha, \beta) = (5, -3) \leftarrow$$

$$\rightarrow T(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta, 5\beta - 3\alpha)$$

$$\rightarrow T(\alpha, \beta) = (5, -3)$$

$$(\alpha - \beta, 5\beta - 3\alpha) = (5, -3) \quad \text{equação vetorial}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 5 \\ -3\alpha + 5\beta = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 5 \\ -3(\beta + 5) + 5\beta = -3 \end{cases}$$

$$-3\beta - 15 + 5\beta = -3$$

$$2\beta = 12 \Rightarrow \beta = 6 \Rightarrow \alpha = 6 + 5 = 11$$

$$\alpha = 11, \quad \beta = 6$$

$$T(11, 6) = (5, -3)$$

$$T^{\alpha \beta}(x, y) = (x - y, 5y - 3x)$$

$$\begin{aligned} T(11, 6) &= (11 - 6, 5(6) - 3(11)) \\ &= (5, 30 - 33) = (5, -3) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$T(\alpha, \beta) = (5, -3)$$

$$\boxed{T^{-1}(5, -3) = (\alpha, \beta) = (11, 6)} \quad \checkmark$$

$$g) \quad T^{-1}(x, y) = (\alpha, \beta)$$

$$T^{\alpha \beta}(x, y) = (x - y, 5y - 3x)$$

$$T(\alpha, \beta) = (x, y)$$

$$T(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta, 5\beta - 3\alpha) = (x, y) \quad \text{eq. vectoriel}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ -3\alpha + 5\beta = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x + \beta \\ -3(x + \beta) + 5\beta = y \end{cases}$$

$$-3x - 3\beta + 5\beta = y$$

$$2\beta = y + 3x \Rightarrow \beta = \frac{y + 3x}{2}$$

$$\alpha = x + \beta = x + \frac{y + 3x}{2} = \frac{y + 5x}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{y + 5x}{2} \\ \beta = \frac{y + 3x}{2} \end{cases}$$

$$T(\alpha, \beta) = (x, y) \Leftrightarrow T^{-1}(x, y) = (\alpha, \beta)$$

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{y+5x}{2}, \frac{y+3x}{2} \right)$$

$$T^{-1}(5, -3) =$$

$$\left(\frac{-3+25}{2}, \frac{-3+15}{2} \right) = (11, 6)$$

$$= 37$$

$$= 42$$

(h) Calcule $T^{-1}(37, 42)$.

$$T(\alpha, \beta) = (37, 42)$$

$$T^{-1}(37, 42) = \left(\frac{42+5(37)}{2}, \frac{42+3(37)}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{42+185}{2}, \frac{42+111}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{227}{2}, \frac{153}{2} \right)$$

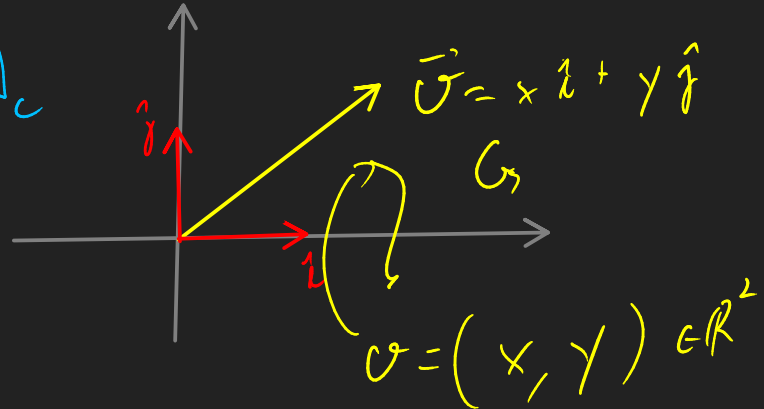
$$T\left(\frac{227}{2}, \frac{153}{2}\right) = (37, 42) \quad ? \quad (\text{exercício})$$

4. Considere a transformação linear $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{3 \times 1}$, que um vetor do $\mathbb{R}^3$ a uma matriz coluna 3×1 . A transformação é dada pela expressão

$$C(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{matriz de coordenadas}$$

(a) Onde você já viu essa operação?

$$C(x, y, z) = [x, y, z]_C$$



(e) Calcule $C(a+b, c-a, b+c)$.

$$C(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

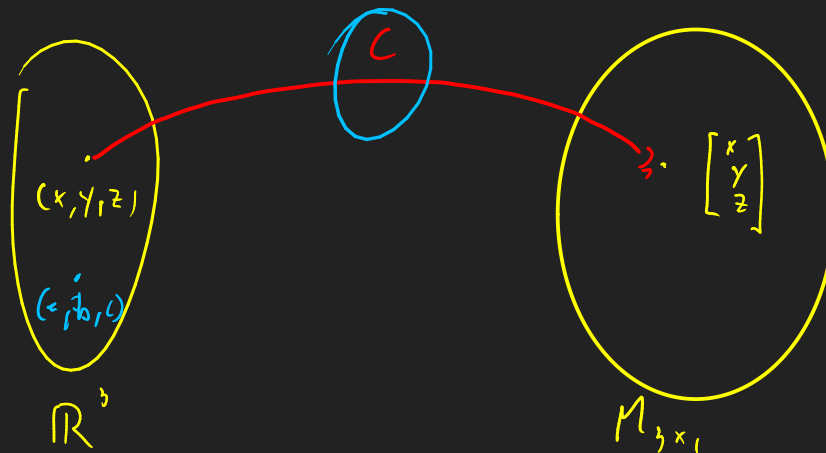
$$C(\underbrace{a+b}_x, \underbrace{c-a}_y, \underbrace{b+c}_z) = \begin{bmatrix} a+b \\ c-a \\ b+c \end{bmatrix}$$

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x+y \\ z-x \\ y+z \end{bmatrix}$$

$$T(\underbrace{a+b}_x, \underbrace{c-a}_y, \underbrace{b+c}_z) = \begin{bmatrix} \underbrace{a+b}_x + \underbrace{(c-a)}_y \\ b+c - (a+b) \\ c-a + (b+c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c \\ c-a \\ -a+b+2c \end{bmatrix}$$

$$C(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- (f) Obtenha uma base e a dimensão do núcleo dessa transformação. Ela é injetora?
 (g) Obtenha uma base e a dimensão da imagem dessa transformação. Ela é sobrejetora?
 (h) Ela é bijetora? Se sim, os espaços $\mathbb{R}^2$ e $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ são isomorfos!



$$C(x, y, z) = C(a, b, c) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{Não é injetora}$$

$$C(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\ker(C) = \{(0, 0, 0)\} \quad \dim(\ker(C)) = 0.$$

$\hookrightarrow \Rightarrow C$ é injetora

g)

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$$C(B) = \{C(1, 0, 0), C(0, 1, 0), C(0, 0, 1)\}$$

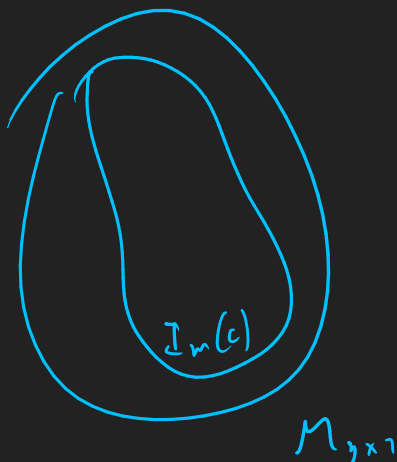
$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ gerador de } \text{Im}(C)$$

L.I.

$$\dim(\text{Im}(C)) = 3$$

$\text{Im}(C)$ é subespaço do $\text{CD}(C) = M_{3 \times 1}$

$$\dim(M_{3 \times 1}) = 3$$



$$\dim(\text{Im}(C)) = \dim(M_{3 \times 1})$$

Logo

$$\text{Im}(C) = M_{3 \times 1}$$

e C é sobrejetora.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(h) Ela é bijetora? Se sim, os espaços $\mathbb{R}^2$ e $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ são isomorfos!

Sim.

- $\dim(D(C)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ } iguais
 - $\dim(\text{CD}(C)) = \dim(M_{3 \times 1}) = 3$
 - $\dim(\text{Ker}(C)) = 0$ ← Injetor
- $\dim(\text{Im}(C)) = 3$ ←

Teo. N-t

$$\dim(M_{3 \times 1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim(\text{Ker}(C)) + \dim(\text{Im}(C)) = \dim(D(C)) \\ 0 + 3 = 3 \end{array} \right.$$

$$0 \leq \dim(\text{Ker}(F)) \leq \dim(D(F))$$

$$0 \leq \dim(\text{Im}(F)) \leq \dim(D(F))$$

Fixados V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$

$$F: V \rightarrow W$$

$$\begin{array}{c} F, G \\ (\lambda F) \\ (F+G) \end{array} \in L(V, W)$$

Definir

• Adição

$$F, G \in L(V, W)$$

$$(F+G)(v) = F(v) + G(v)$$

Adição

Adição em W

é linear

• Multiplicação por escalar

$$\lambda \in \mathbb{K}$$

$$(\lambda F)(v) = \lambda F(v)$$

é linear

$$\text{Existe } \mathbb{0} \in L(V, W): F(v) = \mathbb{0}_W$$

Para cada $F \in L(V, W)$ existe $-F$ tal que

$$F + (-F) = \mathbb{0}_L$$

$$F(v) + (-F(v)) = \mathbb{0}_W$$

//

As transformações do conjunto $L(V, W)$ formam um ESPAÇO VETORIAL

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F, G \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = L(\mathbb{R}^2)$$

São operadores lineares de $\mathbb{R}^2$

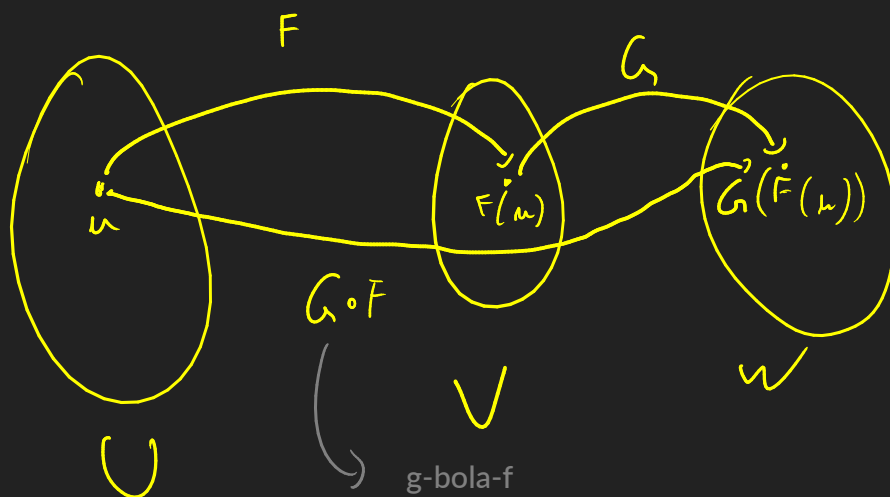
$$F(x, y) = (y, -x)$$

$$G(x, y) = (x+y, x-y)$$

$$(F+3G)(x, y) = F(x, y) + 3G(x, y) = (y, -x) + 3(x+y, x-y)$$

$$(F+3G)(x, y) = (3x+y, 2x-3y)$$

Composição



$$F: U \rightarrow V$$

$$G: V \rightarrow W$$

Definição e composição

$$(G \circ F)(u) = G(F(u))$$

$$\text{Se } F, G, H \in L(V)$$

$$F: V \rightarrow V$$

$$G: V \rightarrow V$$

$$H: V \rightarrow V$$

$$F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H \quad \text{é Associativa}$$

$$\left. \begin{aligned} F \circ (G + H) &= F \circ G + F \circ H \\ (F + G) \circ H &= F \circ H + G \circ H \end{aligned} \right\} \text{é distributiva}$$

$$F \circ G \neq G \circ F \quad \text{não é associativa}$$

$$L(V) \text{ é um GRUPO}$$

$$M_{n \times n} \text{ é um GRUPO}$$

$$\dim(V) = n \quad \dim(W) = n$$

$$\left. \begin{array}{l} \dim(L(V, W)) = mn \\ \dim(M_{n \times n}) = mn \end{array} \right\} \underline{\underline{\text{ISOMORPHIS}}}$$