Lista de exercícios
Prova de reposição
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Envio: Segunda-feira, 21/12/2020

1. Mostre que o conjunto de vetores $\{1, x, x^2, 2 + x + x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ é L.D. e que qualquer subconjunto de três elementos dele é L.I.
   NOTA: $P_2(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial dos polinômios de grau igual ou inferior a 2 com coeficientes reais.

2. Ortonomalize a base $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ pelo processo de Gram-Schmidt considerando o produto interno usual.

3. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido desta forma na base canônica:
$$\begin{aligned} F(1,0,0) &= (2,3,1) \\ F(0,1,0) &= (5,2,7) \\ F(0,0,1) &= (-2,0,7). \end{aligned}$$
   Determine $F(x, y, z)$ para um $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer.

4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $F(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$.
   (a) Obtenha uma base e a dimensão de $\ker(F)$
   (b) Obtenha uma base e a dimensão de $\operatorname{Im}(F)$

5. Considere $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ com base
$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$
   Seja $T : V \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, b + c)\,.$$
   (a) Ache $[T]^B_C$, onde C é a base canônica de $\mathbb{R}^2$

   Se $S : \mathbb{R}^2 \to V$ e
$$[S]^C_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Ache $S(x, y)$ e, se possível, (a, b) tal que $S(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador linear cuja matriz relativa à base canônica é

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Obtenha os autovalores e autovetores de A.

(b) Mostre que existe uma base B de $\mathbb{R}^3$, ortonormal, formada por autovetores de A.

(c) Escreva a matriz mudança de base da base de autovetores de A para a base canônica. Verifique que é uma matriz ortogonal $M^{-1} = M^t$.

(d) Mostre que $[A]_B = M^t[A]M$.