Lista de exercícios
Aula 22 – Diagonalização
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Aula Síncrona: Terça-feira 24/11/2020

1. Lembrando que uma matriz diagonalizável A é semelhante a uma matriz diagonal D, mostre que o determinante de A é igual ao produto de seus autovalores. (Dica: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$)

2. Mostre que o traço de uma matriz diagonalizável é a soma de seus autovalores.

3. Sejam a base canônica de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, a base $C = \{(0,1,1),(0,-1,1),(1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Encontre o polinômio característico de T, os autovalores de T e os autovetores correspondentes.
   (b) Encontre $[T]_C$ e o polinômio característico. O que você pode dizer a respeito dele?
   (c) Encontre uma base D de $\mathbb{R}^3$, se possível, tal que $[T]_D$ seja diagonal. Escreva a matriz M tal que $[T]_D = M^{-1}\,[T]_B\,M$.

4. Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador linear cuja matriz relativa à base canônica é

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Obtenha os autovalores e autovetores de A.
   (b) Mostre que existe uma base B de $\mathbb{R}^3$, ortonormal, formada por autovetores de A.
   (c) Escreva a matriz mudança de base entre a base canônica e a base de autovetores de A. Verifique que é uma matriz ortogonal $M^{-1} = M^t$.
   (d) Mostre que $[A]_B = M^t[A]M$.

5. Potências de matrizes: Seja a matriz A diagonalizável, com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ os respectivos autovetores. Nesse caso, a matriz dos autovalores[*]

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

   será semelhante a A, pois existe uma matriz M de mudança de base tal que $A = M^{-1}\Lambda M$.

   (a) Mostre que $A^2 = M^{-1}\Lambda^2 M$
   (b) Mostre que os autovalores de A^2 são $(\lambda_1)^2, (\lambda_2)^2, \ldots, (\lambda_n)^2$ e $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ os respectivos autovetores.
   (c) Mostre que $A^k = M^{-1}\Lambda^k M$
   (d) Mostre que os autovalores de A^k são $(\lambda_1)^k, (\lambda_2)^k, \ldots, (\lambda_n)^k$ e $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ os respectivos autovetores.
   (e) Mostre que $A^k\boldsymbol{u} = \alpha_1(\lambda_1)^k\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2(\lambda_2)^k\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n)^k\boldsymbol{u}_n$ se $\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{u}_n$. Ou seja, para calcular k aplicações consecutivas de um operador A sobre um vetor $\boldsymbol{u}$, basta decompor $\boldsymbol{u}$ na base dos autovetores de A e multiplicar cada componente pela potência do respectivo autovalor: $(\lambda_i)^k$.

[*] Λ é a letra grega lambda (λ), maiúscula.