

Lista de exercícios  
Aula 21 – Autovalores e autovetores  
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho – ECT – UFRN

Aula Síncrona: Quinta-feira 19/11/2020

1. Encontre os autovalores e autovetores correspondentes dos operadores  $T \in L(\mathbb{R}^2)$  abaixo.
  - (a)  $T(x, y) = (x + y, x - y)$
  - (b)  $T(x, y) = (-x, -y)$
  - (c)  $T(1, 0) = (0, -1)$  e  $T(0, 1) = (1, 0)$
  - (d)  $T(x, y) = (2y, x)$
  
2. Obtenha os autovalores e autovetores correspondentes dos seguintes operadores lineares.
  - (a)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$
  - (b)  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  tal que  $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$
  - (c)  $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tal que  $T(M) = M^T$ , leva a matriz  $M$  à sua transposta.
  
3. Verifique que  $\lambda$  é autovalor e  $v_\lambda$  é o respectivo autovetor do operador  $T : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  nos casos:
  - (a)  $T(f(x)) = f'(x)$ ;  $\lambda = \lambda$ ;  $v_\lambda = e^{\lambda x}$
  - (b)  $T(f(t)) = f''(t)$ ;  $\lambda = -\omega^2$ ;  $v_\lambda = \text{sen}(\omega t)$
  - (c)  $T(f(t)) = f''(t)$ ;  $\lambda = -\omega^2$ ;  $v_\lambda = \cos(\omega t)$
  
4. Encontre o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $T(x, y)$  tenha autovalores  $-1$  e  $3$  associados respectivamente aos autovetores  $(3y, y)$  e  $(-2y, y)$ .
  
5. Considere  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ .
  - (a) Calcule os autovalores e autovetores correspondentes de  $A$  e  $A^2$ .
  - (b) O que você pode dizer ao comparar os autovetores de  $A$  e  $A^2$ ?
  - (c) E quanto aos autovalores?
  - (d) O que você espera dos autovalores e autovetores de  $A^3$ ? Verifique.
  - (e) Use a equação de autovetores  $A v = \lambda v$  para demonstrar esse resultado para  $A^n$ .
  
6. Considere  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ .
  - (a) Calcule os autovalores e autovetores correspondentes de  $A$  e  $A^{-1}$ , a matriz inversa de  $A$ .
  - (b) O que você pode dizer ao comparar os autovetores de  $A$  e  $A^{-1}$ ?
  - (c) E quanto aos autovalores?
  - (d) Use a equação de autovetores  $A v = \lambda v$  para demonstrar esse resultado para uma matriz  $A$  inversível qualquer. (SUGESTÃO multiplique por  $A^{-1}$  pela esquerda de ambos os lados)