Lista de exercícios
Aula 18 – Matriz da composição
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Aula síncrona: Terça-feira 03/11/2017

1. Considere $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Seja $T : V \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a + d, b + c).$$

   (a) Ache $[T]_C^B$, onde C é a base canônica de $\mathbb{R}^2$

   Se $S : \mathbb{R}^2 \to V$ e

$$[S]_B^C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (b) Ache $S(x, y)$ e, se possível, (a, b) tal que $S(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Seja $T \in L(V)$ um operador linear sobre o espaço V de dimensão 2. Se a matriz de T em relação a uma base B é

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

   mostre que $T^2 - (a + d)T + (ad - bc)I = \mathbb{O}$ (operador nulo). Nota: $T^2 = T \circ T$.

3. Mostre que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   não são semelhantes.

4. Sejam

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre os seguintes subespaços e determine bases para eles:

(a) $\ker(A)$

(b) $\mathrm{Im}(A)$

(c) $\ker(B)$

(d) $\mathrm{Im}(B)$

(e) $\ker(B \circ A)$

(f) $\mathrm{Im}(B \circ A)$

Verifique que $\dim(\mathrm{Im}(T))$ = posto de $[T]$ e $\dim(\ker(T))$ = nulidade de $[T]$ nesses casos.

NOTA: O posto de uma matriz é o número de linhas não nulas da sua forma escalonada. A nulidade de uma matriz (pelo teorema núcleo-imagem) é o número de colunas dessa matriz menos seu posto.