Lista de exercícios
Aula 11 – Bases ortogonais
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Aula síncrona: Quinta-feira 24/09/2020

1. Seja V um espaço euclidiano real. Dados $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$, com $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ e $k = \dfrac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$, mostre que $\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{v}$ é ortogonal a $\boldsymbol{v}$.

2. Mostre que a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$, $B = \left\{1, x, x^2\right\}$, não é ortonormal em relação ao produto interno dado por
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

3. Sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, com $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ e $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Considerando o produto interno
$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 - u_1 v_2 - u_2 v_1,$$
   (a) Determinar m a fim de que os vetores $(1 + m, 2)$ e $(3, m - 1)$ sejam ortogonais.
   (b) Determinar todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ ortogonais a $(2, 1)$.
   (c) Determinar todos os vetores da forma $(m, m - 1)$ de norma igual a 1.

4. Ortonomalize a base $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ pelo processo de Gram-Schmidt considerando o produto interno usual.

5. Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ vetores de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, o espaço vetorial das matrizes reais 2×2. Considerando o produto interno
$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^t \boldsymbol{A}),$$
obtenha, pelo processo de Gram-Schmidt, uma base ortonormal a partir da base
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
NOTA: $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ é o traço da matriz $\boldsymbol{A}$, ou seja, a soma dos elementos da diagonal. $\boldsymbol{B}^t$ é a transposta da matriz $\boldsymbol{B}$.
SUGESTÃO: Escreva o produto interno $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$ em função dos elementos a_{ij} e b_{ij} das matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ antes de sair fazendo contas alucinadamente.

6. Considere a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$: $B = \left\{1, x, x^2\right\}$. Construa, a partir dela, uma base ortonormal pelo processo de Gram-Schmidt considerando o seguinte produto escalar:
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$
Esses polinômios são os polinômios de Legendre e descrevem a formas dos orbitais atômicos s, p, d… na descrição quântica do átomo de hidrogênio. Eles também descrevem os chamados multipolos elétricos, importantes para modelar sinais emitidos de uma fonte pontual, como uma antena.