

Lista de exercícios

Aula 21 – Diagonalização de sistemas de equações diferenciais

Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho – ECT – UFRN

Aula Síncrona: Quinta-feira 15/04/2021

1. Considere o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{-k}{m}x + \frac{k}{m}(y - x) \\ \ddot{y} = \frac{-k}{m}(y - x) + \frac{-k}{m}y \end{cases}$$

- (a) Escreva o sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- (b) Obtenha os autovalores λ_1, λ_2 e autovetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ de A.

- (c) Escreva a equação na forma diagonal:

$$\begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \text{ onde } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = p\mathbf{v}_1 + q\mathbf{v}_2$$

- (d) Escreva a solução para $p(t)$ e $q(t)$, lembrando que qualquer combinação linear de $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ é autovetor do operador $\frac{d^2}{dt^2}$ com autovalor $-\omega^2$. Considere como condições iniciais:

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 1 \\ \dot{y}(t=0) = 0 \end{cases}$$

2. Resolva o sistema $\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = A\mathbf{u}(t)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ sujeito à condição inicial $\mathbf{u}(t=0) = (0, 1)$.
3. Resolva o sistema $\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = A\mathbf{u}(t)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sujeito à condição inicial $\mathbf{u}(t=0) = (0, 1, -1)$.