Lista de exercícios
Aula 17 – Matriz da composição
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Questionário: Terça-feira 25/03/2021
Aula síncrona: Terça-feira 25/03/2021

1. Considere as transformações $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (3x - z, x + y, 3x - 2z) \\ G(x, y, z) &= (x + y, z) \\ H(x, y) &= \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}\right) \end{aligned}$$

   (a) Escreva as matrizes $[F]$, $[G]$ e $[H]$ em relação às bases canônicas dos espaços envolvidos.
   (b) Obtenha as matrizes das transformações compostas $G \circ F$, $F \circ G$, $H \circ G$, F^2, G^2 e H^2. Se não for possível, justifique.
   (c) Calcule $(G \circ F)(2, -3, 4)$
   (d) Escreva uma expressão para $(G \circ F)(x, y, z)$.
   (e) Calcule $(H \circ G)(-1, 1)$.
   (f) Escreva uma expressão para $(H \circ G)(x, y)$.

2. Considere $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ com base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Seja $T : V \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, b + c).$$

   (a) Ache $[T]^B_C$, onde C é a base canônica de $\mathbb{R}^2$

   Se $S : \mathbb{R}^2 \to V$ e

$$[S]^C_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Ache $S(x, y)$ e, se possível, (a, b) tal que $S(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Seja $T \in L(V)$ um operador linear sobre o espaço V de dimensão 2. Se a matriz de T em relação a uma base B é
$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
mostre que $T^2 - (a + d)T + (ad - bc)I = \mathbb{O}$ (operador nulo). Nota: $T^2 = T \circ T$.

4. Mostre que as matrizes
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
não são semelhantes.

5. Sejam
$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Encontre os seguintes subespaços e determine bases para eles:
(a) $\ker(A)$
(b) $\mathrm{Im}(A)$
(c) $\ker(B)$
(d) $\mathrm{Im}(B)$
(e) $\ker(B \circ A)$
(f) $\mathrm{Im}(B \circ A)$

Verifique que $\dim(\mathrm{Im}(T))$ = posto de $[T]$ e $\dim(\ker(T))$ = nulidade de $[T]$ nesses casos.
NOTA: O posto de uma matriz é o número de linhas não nulas da sua forma escalonada. A nulidade de uma matriz (pelo teorema núcleo-imagem) é o número de colunas dessa matriz menos seu posto.