Lista de exercícios
Aula 15 – Álgebra de Transformações
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Questionário: Quinta-feira 18/03/2021
Aula síncrona: Quinta-feira 18/03/2021

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$. Mostre que T é um isomorfismo e calcule sua inversa T^{-1}. (Boldrini 5.3.12)

2. Dados $T : U \to V$ linear e injetora e $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, …, $\boldsymbol{u}_k$ vetores LI em U, mostre que $\{T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_k)\}$ é LI.

3. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por $F(x, y, z) = (x + y, z)$ e $G(x, y, z) = (x, y - z)$. Determine as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$:
   (a) $F + G$
   (b) $2F - 3G$

4. Considere $F, G \in L(\mathbb{R}^2)$ dados por $F(x, y) = (x - y, x)$ e $G(x, y) = (x, 0)$. Determine:
   (a) $2F + 3G$
   (b) $F \circ G$
   (c) $G \circ F$
   (d) F^2
   (e) G^2
   (f) G^3

5. Seja $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ base canônica do $\mathbb{R}^3$. Se $F \in L(\mathbb{R}^3)$ é o operador tal que $F(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2$, $F(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_3$, $F(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1$,
   (a) determine $F(x, y, z)$
   (b) e mostre que $F^3 = \mathbb{I}$ e, portanto, $F^2 = F^{-1}$. (Nota: $\mathbb{I}$ é o operador identidade: $\mathbb{I}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$)

6. Sejam $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ e $G \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dados respectivamente por $F(x, y, z) = (x - y, y - z)$ e $G(x, y) = (x - y, y - x, x + y)$. Sendo $\mathbb{I}$ o operador idêntico do $\mathbb{R}^3$, verifique se $G \circ F + \mathbb{I}$ é um automorfismo do $\mathbb{R}^3$. Se for, determine o automorfismo inverso. (Sugestão: qual a dimensão de $\ker(G \circ F + \mathbb{I})$?)

7. Mostre que o operador derivação no espaço $P_n(\mathbb{R})$ é nilpotente.