

Lista de exercícios

Aula 08 – Norma e Ortogonalidade

Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho – ECT – UFRN

Aula síncrona: Quinta-feira 18/02/2021

1. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz para espaços euclidianos reais:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

DICA: Vide Callioli 6.2: Proposição 2 ou Boldrini: 8.3.1: propriedade *iii*)

2. Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores de um espaço euclidiano tais que $\|\mathbf{v}\| = 1$, $\|\mathbf{u}\| = 1$ e $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 2$. Determine $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
3. Se a distância entre \mathbf{u} e \mathbf{v} é igual à distância entre \mathbf{u} e $-\mathbf{v}$, então $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Verdadeiro ou falso? Justifique.
4. No espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$, com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

calcule $\langle f, g \rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$ e $\|f + g\|$ nos seguintes casos:

(a) $f(t) = t^2 - t - 1$ e $g(t) = t^2 + 1$ (b) $f(t) = 2$ e $g(t) = t^3 + t + 1$

5. Encontre a distância de \mathbf{u} a \mathbf{v} e o cosseno do ângulo entre eles nos seguintes casos:

(a) $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 0, 1, 1)$ com o produto interno usual do \mathbb{R}^4 .

(b) $\mathbf{u} = 1 + t - t^2$ e $\mathbf{v} = 3t^2$ com o produto interno do exercício 4.

(c) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ com o produto interno dado por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$, onde $\text{tr}(A)$ é o traço da matriz A e B^t é a transposta da matriz B .