

14.3. Isomorfismos

- Um *isomorfismo* é uma transformação linear $F: V \rightarrow W$ que seja bijetora.
- Um isomorfismo $F: V \rightarrow V$ é um *automorfismo*.
- Se $F: V \rightarrow W$ é um isomorfismo, então $F^{-1}: W \rightarrow V$ também é um isomorfismo.
- Se existe um isomorfismo $F: V \rightarrow W$, os espaços V e W são isomorfos.
- Dois espaços V e W são isomorfos se e somente se $\dim(V) = \dim(W)$

$$F: V \rightarrow W$$

F é bijetora $\Leftrightarrow F$ é isomorfismo.
 (bijetora $\Rightarrow$ injetora e sobrejetora)
 (isomorfismo $\Rightarrow$ inversível)
 $\Downarrow$
 V e W são isomorfos

Espaços isomorfos são indistinguíveis no que se refere a Álgebra Linear

V e W são isomorfos se e somente se $\dim(V) = \dim(W)$

Esboço da demonstração

V e W isomorfos $\Rightarrow \dim(V) = \dim(W)$

Existe $F: V \rightarrow W$ bijetora:

F é sobrejetora: $\Rightarrow \text{Im}(F) = W$
 $\dim(\text{Im}(F)) = \dim(W)$

F é injetora: $\Rightarrow \ker(F) = \{0_V\} \Rightarrow \dim(\ker(F)) = 0$

$$\dim(\ker(F)) + \dim(\text{Im}(F)) = \dim(V)$$

$$0 + \dim(W) = \dim(V).$$

$\dim(V) = \dim(W) \Rightarrow V$ e W são isomorfos

$\dim(V) = \dim(W) = n$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$C = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W .

Defino

$$F: V \rightarrow W:$$

$$F(v_1) = w_1$$

$$F(v_2) = w_2$$

$$\vdots$$

$$F(v_n) = w_n$$

$$F(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \dots$$

$$F(B) = ($$

F transforma base de V em base de W.

{ Como V e W têm a mesma dimensão, F é sobrejetora, portanto injetora, logo bijetora e isomorfismo

Todo espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos reais é isomorfo a $\mathbb{R}^n$

$$T: V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$T(v) = [v]_B$$

Definições

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $L(V, W)$ o conjunto das transformações lineares de V em W .

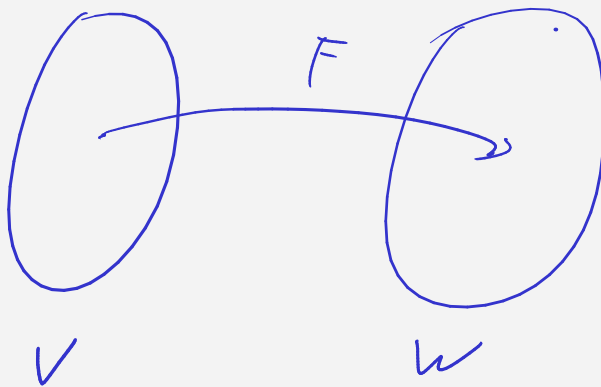
Definimos, para as transformações $F, G \in L(V, W)$ e o escalar $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\text{Adição} : (F + G)(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{u}).$$

$$\text{Multiplicação por escalar} : (\lambda F)(\mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u}).$$

Proposição

O conjunto $L(V, W)$ com as operações acima é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.



$L(V, W) \rightarrow \text{esp. vetorial.}$

Composição de transformações



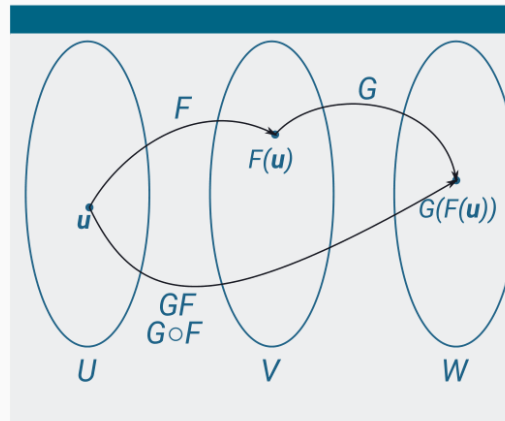
Sejam U, V, W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $F : U \rightarrow V$ e $G : V \rightarrow W$ transformações lineares.

Proposição

A transformação composta GF dada por $(GF)(\mathbf{u}) = G(F(\mathbf{u}))$ é uma transformação linear de U em W .

Notação

A composta GF também é notada por $G \circ F$.



GF existe somente se $\mathcal{D}(G) = \mathcal{CD}(F)$

$$(GF)(u) = (G \circ F)(u) = G(F(u))$$

Propriedades:

1) Associativa

$$H(GF) = (HG)F = HGF$$

2) Distributiva de adição

$$G(F_1 + F_2) = GF_1 + GF_2$$

$$(H_1 + H_2)G = H_1G + H_2G$$

3) associativa da multiplicação por escalar

$$\lambda(GF) = (\lambda G)F = G(\lambda F)$$

4) NÃO É COMUTATIVA

$$\text{Em geral } GF \neq FG$$

$$\text{Operadores: } F: V \rightarrow V$$

Casos especiais:

$$1) \text{ Identidade } I: V \rightarrow V$$

$$I(v) = v$$

2) Potências de operadores

$$FF = F^2$$

$$(FF)(v) = F(F(v))$$

$$F^3 = FFF = F \circ F \circ F$$

$$\text{Com } G: V \rightarrow W$$

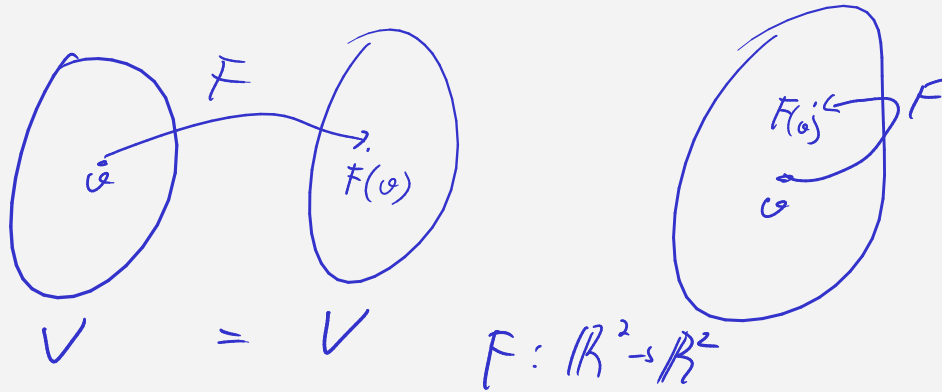
G^2 não está definido:

$$G(\underbrace{G(v)}_{\notin V}) \quad \times$$

3) Polinômios de operadores:

$$p(F) = \alpha F + \alpha F^2 + \alpha F^3 + \dots$$

$$F \in L(V) \Rightarrow p(F) \in L(V).$$



$$F: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$$

Casos interessantes:

1) Operador nilpotente

↳

$$\text{Exis } n > 0 \text{ t. q.}$$

$$F^n = \mathcal{O}$$

$$\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}_v$$

$$\text{Ex.: } D: P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$$

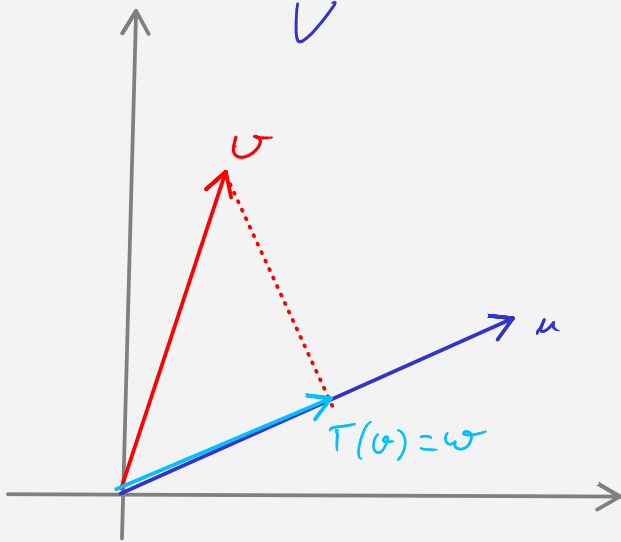
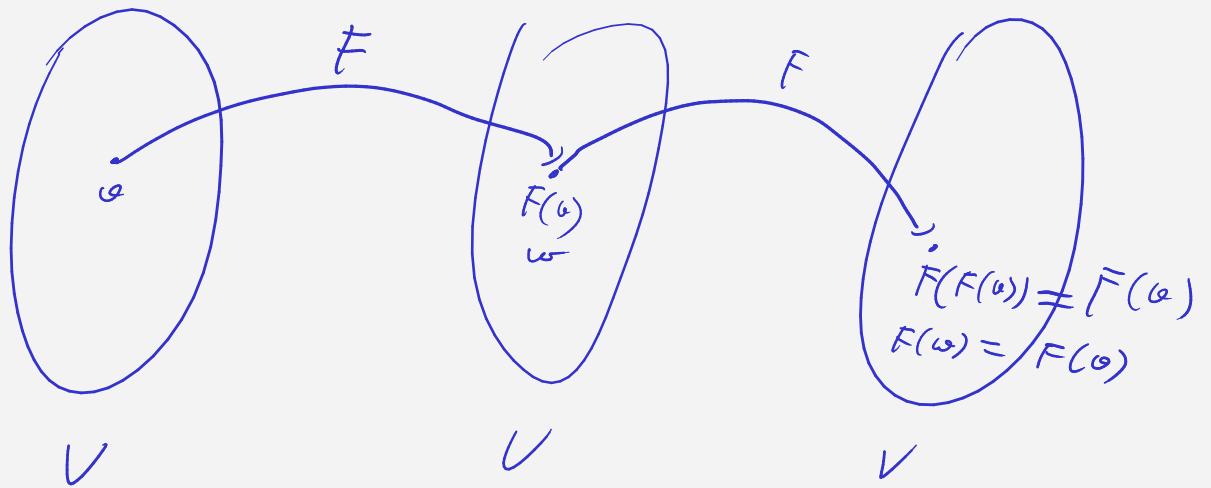
$$D^{n+1} = \mathcal{O}$$

2) Operador idempotente (projeção)

$$F^2 = F$$

Exercício:

~~$$F^n = I$$~~



$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T(u) = \text{proj}_u u$$

$$T(w) = w$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = (x+y, 0)$$

$$F^2(x, y) = F(F(x, y)) = F(x+y, 0)$$

$$(x+y+0, 0)$$

$$= (x+y, 0) = F(x, y)$$

Definição

A matriz $m \times n$:

$$[F]_C^B = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

é a **matriz da transformação** F em relação às bases B e C .

As colunas de $[F]_C^B$ são as coordenadas de $F(\mathbf{v}_j)$:

$$[F]_C^B = [[F(\mathbf{v}_1)]_C \quad [F(\mathbf{v}_2)]_C \quad \dots \quad [F(\mathbf{v}_n)]_C]$$

$$F: V \rightarrow W$$

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } V$$

$$C = \{w_1, \dots, w_m\} \text{ base de } W.$$

$$[F]_C^B$$

$$[F(v)]_C = [F]_C^B [v]_B$$

matriz $\swarrow$
coluna

Mudança de base:

$$I: V \rightarrow V$$

$$I(v) = v$$

$$[I(v)]_C = [v]_C = [I]_C^B [v]_B$$

Ex.: $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x, y, z) = (x+y, y+z)$$

$$B = \{ \underset{v_1}{(1,0,0)}, \underset{v_2}{(0,1,0)}, \underset{v_3}{(0,0,1)} \} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

(canônica)

$$C = \{ \underset{w_1}{(1,0)}, \underset{w_2}{(1,1)} \} \text{ base de } \mathbb{R}^2$$

Obter a matriz $[F]_C^B$

1) Escrever $F(B)$, sobre os vetores da base B

$$F(v_1) = F(1,0,0) = (1,0)$$

$$F(v_2) = F(0,1,0) = (1,1)$$

$$F(v_3) = F(0,0,1) = (0,1)$$

2) Escrever as matrizes de coordenadas desses vetores na base C

$$[F(v_1)]_C$$

$$\begin{aligned} F(v_1) &= (1, 0) = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{21} w_2 \\ &= \alpha_{11} (1, 0) + \alpha_{21} (1, 1) \end{aligned}$$

$$(1, 0) = w_1 \Rightarrow [F(v_1)]_C = [(1, 0)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

$$[F(v_2)]_C = [(1, 1)]_C$$

$$(1, 1) = w_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_C$$

$$[F(v_3)]_C = [(0, 1)]_C : \begin{aligned} (0, 1) &= \alpha_{13} w_1 + \alpha_{23} w_2 \\ (0, 1) &= \alpha_{13} (1, 0) + \alpha_{23} (1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_{13} + \alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{23} = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_{13} = -1$$

$$[F(v_3)]_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_C$$

As colunas de $[F]_C^B$ são as coordenadas de $F(v_j)$:

$$[F]_C^B = [[F(v_1)]_C \quad [F(v_2)]_C \quad \dots \quad [F(v_n)]_C]$$

$$[F]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(1, -2, 3)$$

$$F(x, y, z) = (x+y, y+z)$$

$$F(1, -2, 3) = (1+(-2), -2+3) = (-1, 1)$$

$$[F(1, -2, 3)]_C = [F]_C^B [(1, -2, 3)]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 - 3 \\ -2 + 3 \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}_C$$

$$[F(1, -2, 3)]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}_C \Rightarrow F(1, -2, 3) = -2w_1 + 1w_2 \\ = -2(1, 0) + (1, 1) \\ = (-2+1, 1) = (-1, 1),$$

$$T: P_1 \rightarrow P_1$$

$$B = \{1, t\} \text{ canônicas de } P_1$$

$$[T]_B = [T]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

↙ Linear

Obtenha uma expressão para $T(a + bt)$

comb. linear

$$\begin{aligned} T(a + bt) &= T(\overbrace{a(1) + b(t)}^{\text{comb. linear}}) \\ &= T(a(1)) + T(b(t)) \\ &= aT(1) + bT(t) \end{aligned}$$

$$T(1) = ?$$

$$T(t) = ?$$

$$[T(1)]_B = [T][1]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$

$$[T(t)]_B = [T][t]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B \Rightarrow T(1) = 0(1) + 1(t) \\ T(1) = t$$

$$[T(t)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \Rightarrow T(t) = 1(1) + 0(t) \\ T(t) = 1$$

$$T(a+bt) = aT(1) + bT(t) \\ = at + b(1)$$

$$T(a+bt) = b + at$$

$$[T(a+bt)]_B = [T] [a+bt]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

$$T(a+bt) = b(1) + a(t) = b + at.$$