14.3. Isomorfismos

- Um *Isomorfismo* é uma transformação linear $F: V \to W$ que seja bijetora.
- Um isomorfismo $F: V \to V$ é um *automorfismo*.
- Se $F: V \to W$ é um isomorfismo, então $F^{-1}: W \to V$ também é um isomorfismo.
- Se existe um isomorfismo $F: V \to W$, os espaços V e W são isomorfos.
- Dois espaços V e W são isomorfos se e somente se $\dim(V) = \dim(W)$

$F: V \to W$

F é bijetora $\Leftrightarrow$ F é um isomorfismo

injetora sobrejetora

↳ V e W isomorfos

Espaços isomorfos são essencialmente indistinguíveis no tocante à Álgebra Linear

Espaços vetoriais V e W são isomorfos se e somente se dim(V) = dim(W)

V e W isomorfos => dim(V) = dim(W)

F é bijetora => injetora => dim(ker

dim ≤ dim(V)

$$\dim(\cancel{\ker(F)}) + \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(V) = \dim(W)$$

0

≤ dim(W)

dim(W) = 3   dim(V) = 2

dim (Im(F)) ≤ 2 => não tem F sobrejetora

dim (ker (F)) ≥ 1 => Não tem F. injetora.

Sobrejetora => dim(Im) = dim(W)

dim(V) = dim(W) => V e W isomorfos

Sejam $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$C = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W

Define $F: V \to W$:

$$\left.\begin{aligned} F(v_1) &= w_1 \\ F(v_2) &= w_2 \\ &\vdots \\ F(v_n) &= w_n \end{aligned}\right\}$$ sobrejetora e injetora.

Matrizes de transformação

Exemplos

Definição

A matriz $m \times n$:

$$[F]_C^B = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz da transformação F em relação às bases B e C.

As colunas de $[F]_C^B$ são as coordenadas de $F(\mathbf{v}_j)$:

$$[F]_C^B = \begin{bmatrix} [F(\mathbf{v}_1)]_C & [F(\mathbf{v}_2)]_C & \ldots & [F(\mathbf{v}_n)]_C \end{bmatrix}$$

$$[F(v)]_C = [F]_C^B [v]_B$$

Transf. Identidade:

$I: V \to V$

$I(v) = v$

$$[v]_C = [I]_C^B [v]_B$$

Ex:

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y,z) = (x+y, y+z)$$

$B: \{\underset{v_1}{(1,0,0)}, \underset{v_2}{(0,1,0)}, \underset{v_3}{(0,0,1)}\}$ base $\mathbb{R}^3$ (canônica)

$C: \{\underset{w_1}{(1,0)}, \underset{w_2}{(1,1)}\}$ base de $\mathbb{R}^2$. (não canônica)

$[F]_C^B$?

1Escrever F(B)

$$F(v_1) = F(1,0,0) = (1,0)$$
$$F(v_2) = F(0,1,0) = (1,1) = w_2$$
$$F(v_3) = F(0,0,1) = (0,1)$$

2 Escrever as coordenadas dos vetores em F(B) na base C

$$F(v_1) = (1,0) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2$$
$$= a_{11}(1,0) + a_{21}(1,1)$$

$$\begin{cases} 1 a_{11} + 1 a_{21} = 1 \\ 0 a_{11} + 1 a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \end{cases} \checkmark$$

$$[F(v_1)]_C = [(1,0)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

$$F(v_2) = (1,1) = w_2 = 0 w_1 + 1 w_2$$

$$[F(v_2)]_C = [(1,1)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_C \leftarrow$$

$$F(v_3) = (0,1) = a_{13} w_1 + a_{23} w_2$$
$$= a_{13}(1,0) + a_{23}(1,1)$$

$$\begin{cases} a_{13} + a_{23} = 0 \\ a_{23} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{13} + 1 = 0 \\ a_{23} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{13} = -1 \\ a_{23} = 1 \end{cases}$$

$$[F(v_3)]_C = [(0,1)]_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$

As colunas de $[F]_C^B$ são as coordenadas de $F(\mathbf{v}_j)$:

$$[F]_C^B = [[F(\mathbf{v}_1)]_C \quad [F(\mathbf{v}_2)]_C \quad \ldots \quad [F(\mathbf{v}_n)]_C]$$

$$[F]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $F(3,-2,7)$

$F(x,y,z) = (x+y,\ y+z)$

$F(3,-2,7) = (3+(-2),\ -2+7) = (1,5)$

$[F(3,-2,7)]_C = [F]_C^B\,[(3,-2,7)]_B$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3-7 \\ -2+7 \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}_C$

$F(3,-2,7) = -4w_1 + 5w_2$

$= -4(1,0) + 5(1,1)$

$= (-4+5,\ 5) = (1,5)$ ✓

Os espaços vetoriais L(V,W) e $M_{m\times n}$ são isomorfos.

$\dim(V) = n$
$\dim(W) = m$

A transformação $M : L(V,W) \to M_{m\times n}$

$M(F) = [F]_C^B$ é bijetora.

Ex: $T: P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$

Na base $B = \{1, t\}$:

$[T]_B^B = [T]_B = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Obtenha $T(a+bt)$

$$T(a,b) = T(a \cdot 1 + bt)$$
$$= \boxed{a\,T(1) + b\,T(t)}$$

$T(1) = ?$ $\quad T(t) = ?$

$$[T(1)]_B = [T][1]_B = [T]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_B \Rightarrow T(1) = 0v_1 + 1v_2$$
$$= 0(1) + 1t = t$$

$$\boxed{T(1) = t}$$

$$[T(t)]_B = [T][t]_B = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$[T(t)]_B = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_B \Rightarrow T(t) = 1v_1 + 0v_2$$
$$= 1(1) + 0t$$

$$\boxed{T(t) = 1}$$

$$T(a+bt) = aT(1) + bT(t)$$
$$= a\,t + b(1)$$
$$= b + at. \quad //$$

Existe 1 transf $M^{-1}: M_{m\times n} \to L(V,W)$

$$\dim(L(V,W)) = \dim(M_{m\times n}) = mn \quad //$$

Coordenadas

Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$. Seja $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ uma base ordenada desse espaço. Para cada vetor $\boldsymbol{v} \in V$, a n-upla de escalares $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tal que

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j$$

é única e chamada de coordenadas de $\boldsymbol{v}$ na base B.

Matriz de coordenadas

Se as coordenadas do vetor $\boldsymbol{v}$ na base B são $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, então

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_B$$

é a matriz de coordenadas de $\boldsymbol{v}$ na base B.

$C = \{1, t, t^2\}$

$$[1 + t + t^2]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$

Composição de transformações.

Composição de transformações

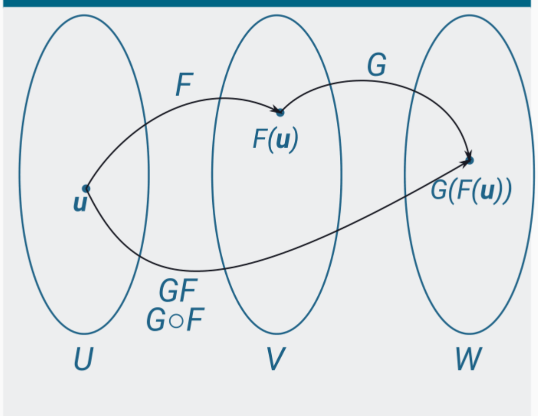
Sejam U, V, W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $F : U \to V$ e $G : V \to W$ transformações lineares.

Proposição

A *transformação composta GF* dada por $(GF)(\mathbf{u}) = G(F(\mathbf{u}))$ é uma transformação linear de U em W.

Notação

A composta GF também é notada por $G \circ F$.



$$(GF)(u) = G(F(u))$$

Propriedades:

1) Associativa $\quad H(GF) = (HG)F$

2) Distributiva $\quad G(F_1 + F_2) = GF_1 + GF_2$

$$(F_1 + F_2)G = F_1G + F_2G$$

3) Distributiva da multiplicação por escalar

$$\lambda(GF) = (\lambda G)F = G(\lambda F)$$

4) NÃO É COMUTATIVA!

em geral $\quad GF \neq FG$

$u \in U$

$G : V \to W$

$F : U \to V$

$$: \quad (GF)(u) = G(\underbrace{F(u)}_{\in V})$$

$$\cancel{(FG)(v) = F(G(v))}$$

$v \in V$ $\qquad G(v) \in W \neq D(F)$

Operadores Lineares

$$F: V \to V$$

1) Identidade. $I: V \to V$

$I(v) = v$

Potenciação de operadores

$$(FF)(v) = F^2(v) = F(F(v))$$

Polinômios de operadores:

$$p(F) = \alpha F + \beta F^2 + \gamma F^3 + \dots$$

$$p(F) \in L(V)$$

1) Operadores nilpotentes

existe $n \geq 1$ t.q.

$$F^n = 0$$

2) Operador idempotente: (projeção)

$$\boxed{F^2 = F}$$

3) Operador inverso: $F^{-1}: V \to V$

$$FF^{-1} = I \iff F^{-1}F = I$$

$$F^2F^{-1} = F(FF^{-1}) = FI = F$$

Transf. bijetoras $F: V \to W$

Inversa à esq e inv. à dir.

$$F_E^{-1} \cdot (F_E^{-1} F)(v) = v$$

$$F_E^{-1} : W \to V$$

$$F_D^{-1} : W \to V \qquad w \in W$$

$$(F F_D^{-1})(\vec{w}) = w$$

Se F possui F_E^{-1} e F_D^{-1} então

$$F_E^{-1} = F_D^{-1}$$

$$S : C^1 \to C^1 \; : \; S(f) = \int f(x)\,dx$$

$$D : C \to C \; : \; D(f) = \frac{df}{dx}$$

$$(SD)(f) = \int \frac{df}{dx}\,dx = f(x) + c \;/\!/ \neq f(x)$$

$$(DS)(f) = \frac{d}{dx} \int f(x)\,dx = f(x) \;/\!/$$

$D = S_E^{-1}$ mas $\nexists\, S_D$.

$S = D_D^{-1}$ mas $\nexists\, D_E^{-1}$