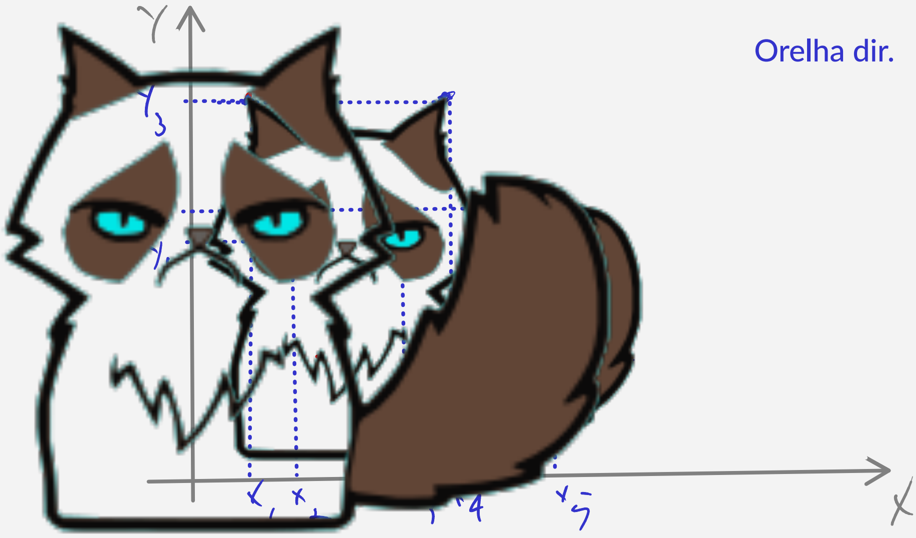
Notas de aula ECT2202 T03 2021-03-30 Aula 18 — Transformações Lineares e geometria

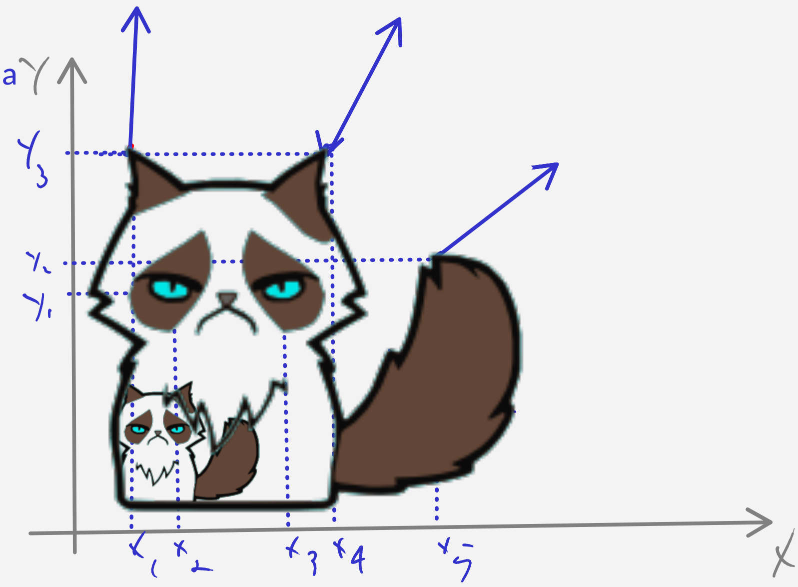
$\mathbb{R}^2$

Orelha dir. $(x_1, y_1$



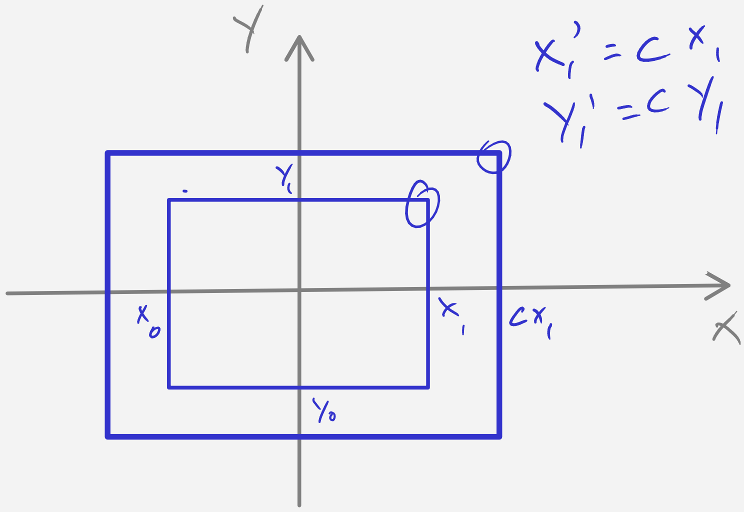
Transformações geométricas no plano

Escala

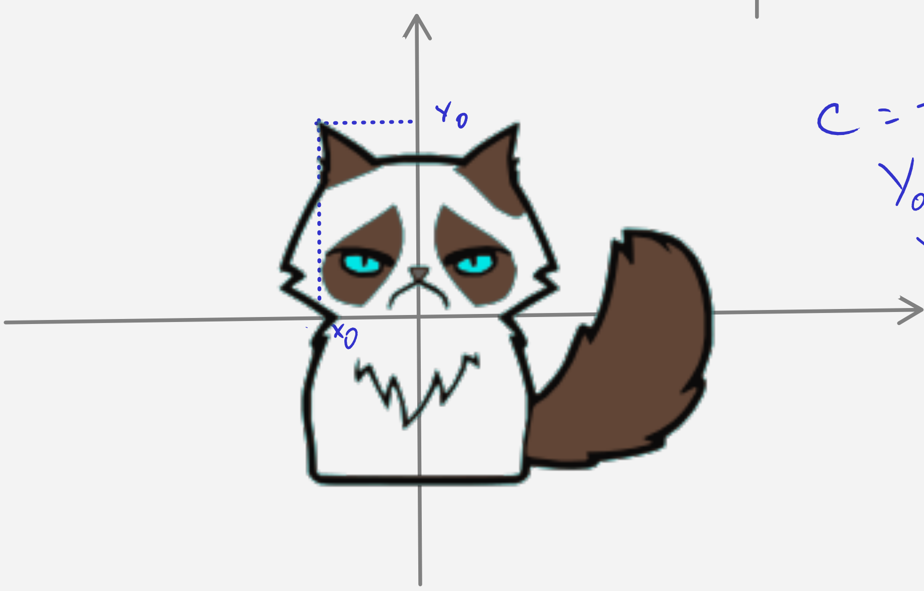


Para cada ponto (x,y):

Escala por um fator c:
c > 1 = ampliação
0 < c < 1 = redução



$$x_1' = c\,x_1$$
$$y_1' = c\,y_1$$



$$c = -1$$
$$y_0' = -1\,y_0$$
$$y_0' = -y_0$$

Para cada ponto (x, y)

$$(x', y') = S(x, y) = (cx, cy)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escala assimétrica

$$S(x,y) = (c_1 x, c_2 y)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$S\Big($  $\Big) =$ 

$c_1 \approx 1/3$

$c_2 = 1$

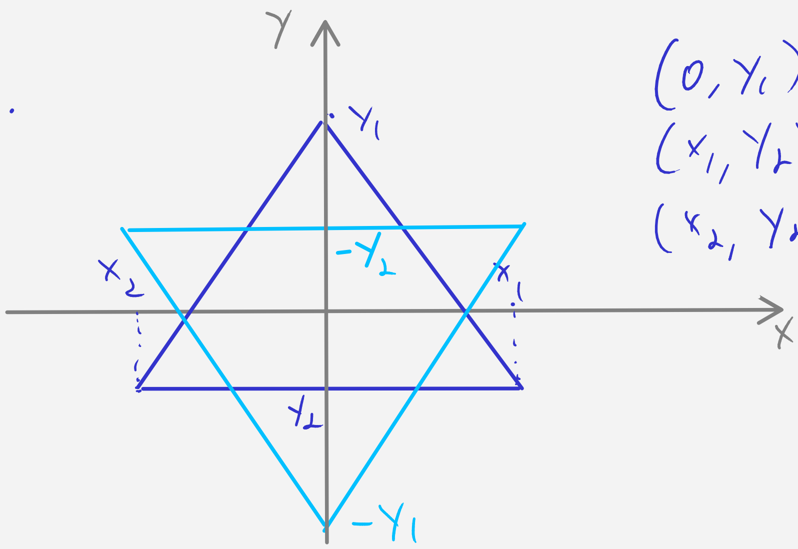
$\mathbb{R}^3$ Para cada ponto (x,y,z)

$$(x',y',z') = S(x,y,z)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

diagonais

Reflexão em torno de um eixo



Refletir em torno do eixo x

$(0,y_1)$
(x_1,y_2)
(x_2,y_2)

$$(x',y') = E_x(x,y) = (x,-y)$$

$$[E_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

No eixo y:

$$(x', y') = E_y(x, y) = (-x, y)$$

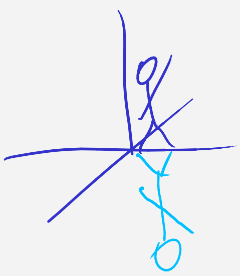
$$[E_y] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ Reflexões em relação a planos:

(x, y, z)

Reflexão no plano (xy)

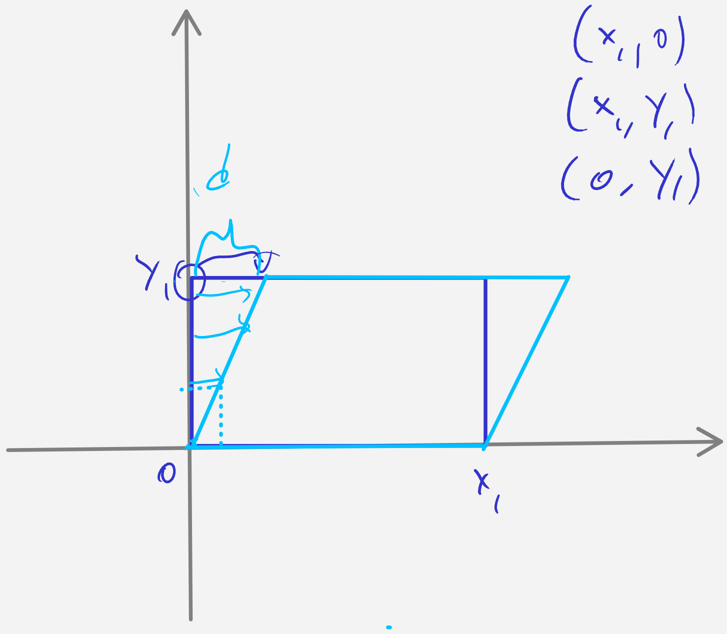
$$(x', y', z') = (x, y, -z)$$



No plano x, z

$$E_{xz}(x, y, z) = (x, -y, z)$$

Cisalhamento (Shear)



$(0,0)$
$(x_1, 0)$
(x_1, y_1)
$(0, y_1)$

$$(x,y) = (x + \alpha y, y)$$
$$= \left(x + \frac{d}{y_1} y, y\right)$$

Cisalhamento na direção x

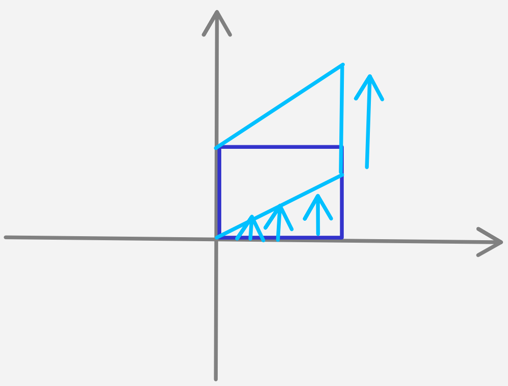
$$C_x(x,y) = (x + \alpha y, y)$$

$$[C_x] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix}$$

Cisalhamento na direção y

$$(x', y') = C_y(x, y + \alpha x)$$

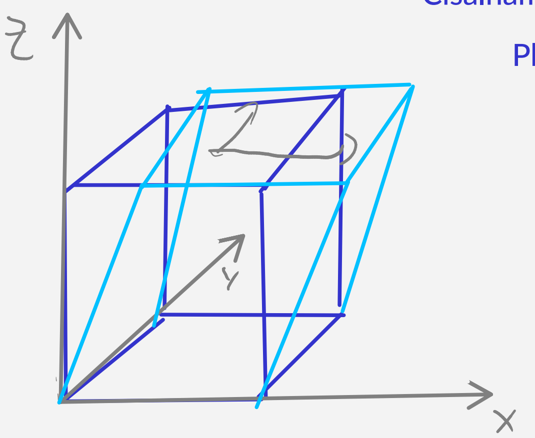


$$[C_y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$

Cisalhamento na direção x em termos da coordenada z

Plano xy na direção x



Cisalhamento no eixo z
na direção x

$$(x', y', z') = (x + \alpha z, \; y, \; z)$$

$$[C_{xy,x}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

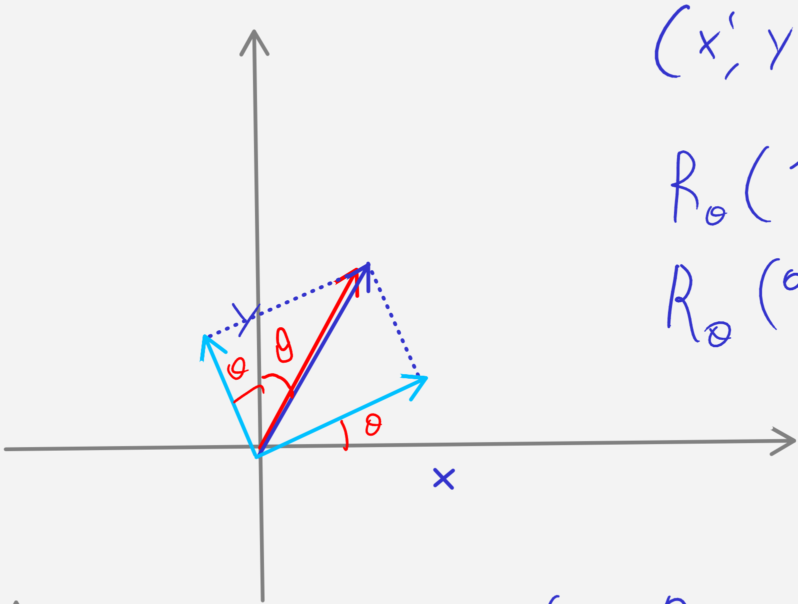
Rotação no plano

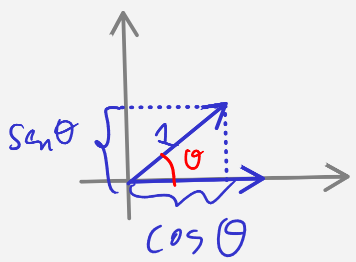
Em torno da origem de um ângulo θ

$$(x', y') = R_\theta(x, y)$$

$$R_\theta(1, 0)$$

$$R_\theta(0, 1)$$





$$R(1,0) = (\cos\theta, \; \operatorname{sen}\theta)$$

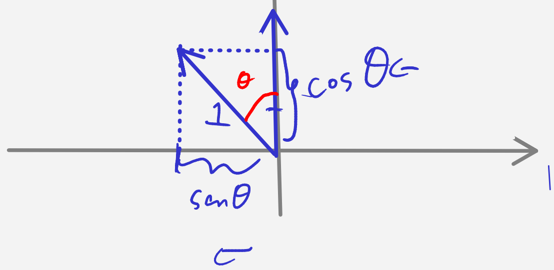
$$[R]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

↳ 1ª col.

$R(1,0) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$$[R]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$

↳ 2ª col



$$R(x,y) = x\,R(1,0) + y\,R(0,1) \leftarrow$$
$$= x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$
$$= (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) \leftarrow$$

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Matriz de rotação no $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$R_\theta(-1,1)$:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

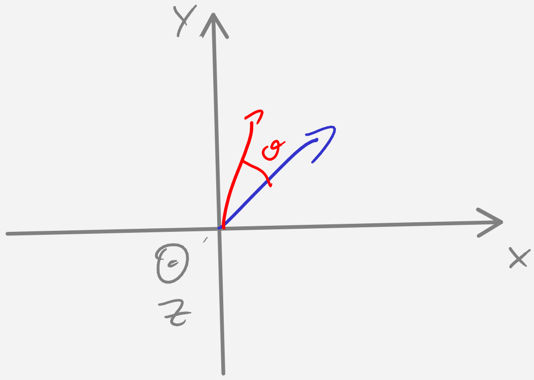
$$(-\cos\theta - \operatorname{sen}\theta,\ -\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$$

$\mathbb{R}^3$: rotações em torno de eixos.

Em torno do eixo z

coordenada z não muda

coordenadas xy mudam.

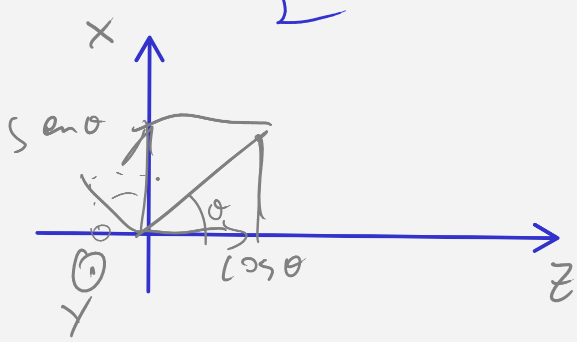


$$[R_{z,\theta}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No eixo x:

$$[R_{x,\theta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[R_{y,\theta}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

Translação:

$$(x, y, z) \to (x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$$

Não é transformação linear.

Não pode ser representada por multiplicação de matriz nessas coordenadas.

Coordenadas HOMOGÊNEAS

$$\to (x, y, z, 1)$$

$$(x', y', z', 1) = T(x, y, z, \boxed{1}) = (x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \boxed{1})$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ GERAL DE TRANSFORMAÇÃO (COM TRANSLAÇÃO)

$$\begin{bmatrix} A & B & C & 0 \\ D & E & F & 0 \\ G & H & I & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{R}^3$$

R^2:

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ E & F & 1 \end{bmatrix}$$

translação