# Notas de aula ECT2202 T05 2021-04-22 Aula 23 — Diagonalização de f. quadráticas

## Formas Bilineares

$F : (V \times V) \to \mathbb{R}$, com $V$ esp. vet. sobre $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} u \in V \\ v \in W \end{array}\right\} \Rightarrow (u, v) \in V \times W$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

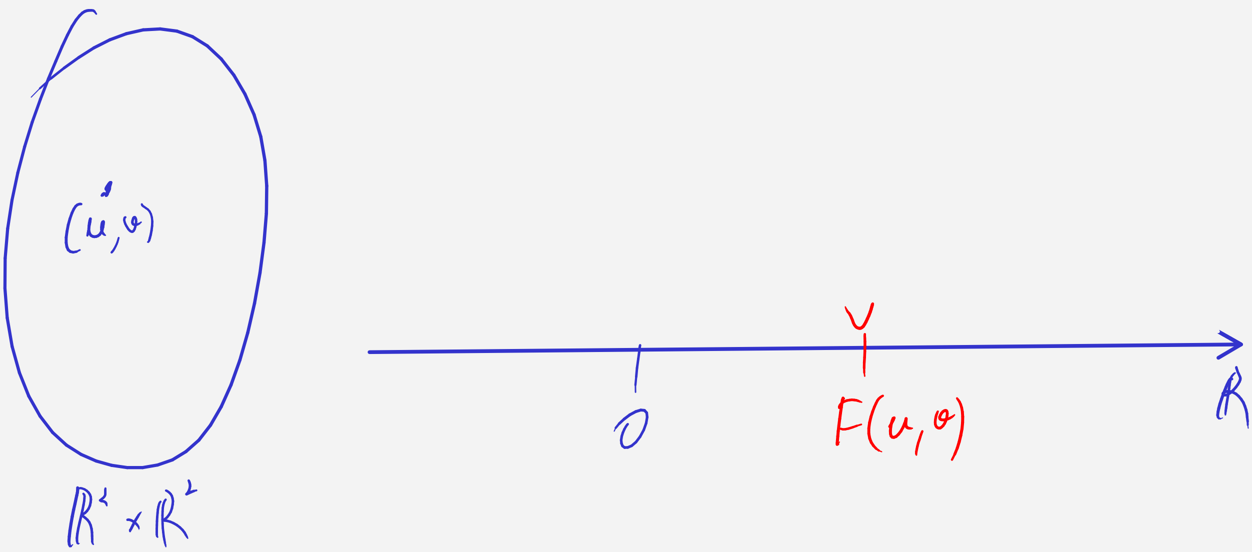
$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

---

$F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

$u = (x_1, y_1)$

$v = (x_2, y_2)$




$$F(u, v) = F((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = a x_1 x_2 + b x_1 y_2 + \dots$$

Forma bilinear:

$F(u, v)$ seja homogênea e aditiva em ambos os vetores

Aditividade:

$$F(u+w, v) = F(u, v) + F(w, v)$$
$$F(u, v+w) = F(u, v) + F(u, w)$$

Homogeneidade

$$F(\alpha u, v) = \alpha F(u, v)$$
$$F(u, \alpha v) = \alpha F(u, v)$$

F é forma $\underline{\text{bi}}$linear

---

Forma sesquilinear

$F : (V \times V) \to \mathbb{C}$ , $V$ é esp. vet. sobre $\mathbb{C}$

Aditiva

$$F(u+w, v) = F(u, v) + F(w, v)$$
$$F(u, v+w) = F(u, v) + F(u, w)$$

Homogeneidade

$$F(u, \alpha v) = \alpha F(u, v)$$
$$F(\alpha u, v) = \bar{\alpha} F(u, v)$$

Linear no segundo argumento e conjugada linear no primeiro argumento:
linear E MEIO: sesquilinear

Hexa linear

$$\det\left(M_{6\times 6}\right)$$

$$\det\left[[v_1]\,[v_2]\,[v_3]\,[v_4]\,[v_5]\,[v_6]\right].$$

HEXALINEAR!!!!!!!!!!!!!ONZE11!!!!!!!

Forma bilinear simétrica

$F: V \times V \to \mathbb{R}$ $\qquad \dim(V) = n$

tal que $F(u,v) = F(v,u)$

Matriz de $F$:

$$[F] = \begin{bmatrix} F(v_1,v_1) & \cdots & F(v_1,v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(v_n,v_1) & \cdots & F(v_n,v_n) \end{bmatrix}$$

$[F]$ é matriz simétrica. $[F]^t = [F]$

TODA MATRIZ SIMÉTRICA REAL É DIAGONALIZÁVEL E EXISTE BASE ORTONORMAL EM QUE A MATRIZ É DIAGONAL.

Forma sesquilinear hermitiana

$H : V \times V \to \mathbb{C}$ sesquilinear

$H(u,v) = \overline{(H(v,u))}$

$[H]$ será hermitiana.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é hermitiana s.s.s.

$b = \bar{c}$

$a, d \in \mathbb{R}$

$[H]^{\dagger} = [H]$

$[H]^{\dagger}$ matriz hermitiana conjugada de H

TODA MATRIZ COMPLEXA HERMITIANA É DIAGONALIZÁVEL

$z = a + bi \in \mathbb{C}$ $\quad i^2 = -1$

$\bar{z} = a - bi$

Se $b = 0$, $z = \bar{z}$ e $z \in \mathbb{R}$

$[H]^{\dagger} = [H]^{\dagger} = \overline{([H]^T)}$

Exemplo de forma bilinear simétrica:

Produto interno em esp. vetoriais reais.

$$P(u,v) = \langle u, v \rangle$$

$u = [x, y, z]$

$v = [a, b, c]$

Prod. interno usual:

$$\langle u, v \rangle = xa + yb + zc$$

$$\langle v, u \rangle = ax + by + cz$$

$$P(u,v) = ax + by + cz$$

$$[u]^T [v] = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Na base canônica, a matriz da forma bilinear simétrica do produto interno usual é

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz de uma forma bilinear simétrica:

$$P((x,y,z),(x,y,z)) = [(x,y,z)]^T [P] [(x,y,z)]$$

$$P(u,v) = [u]^T [P] [v]$$

vetores da base.

$$[P] = \begin{bmatrix} P(v_1,v_1) & \cdots & P(v_1,v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(v_n,v_1) & \cdots & P(v_n,v_n) \end{bmatrix}$$

em relação à base

$$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

Exemplo

Assinale a forma quadrática $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuja a matriz simétrica, em relação à base canônica, é dada por $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Forma quadrática: forma bilinear simétrica:

$q : V \to \mathbb{R}$ dado $f : V \times V \to \mathbb{R}$

$$q(v) = f(v,v)$$

$$[q] = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$q(x,y) = f((x,y),(x,y)) = [(x,y)]^T [q] [(x,y)]$$

$$q(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} -4x + 4y \\ 4x + 2y \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$= x(-4x + 4y) + y(4x + 2y)$$

$$= -4x^2 + 4xy + 4xy + 2y^2$$

$$= -4x^2 + 8xy + 2y^2$$

$$q(x,y) = -4x^2 + 8xy + 2y^2$$

$$q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

$$Axx + Bxy + Cyy$$

$$[q] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \end{array}$$

$$q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax + B/2\, y \\ B/2\, x + Cy \end{bmatrix}$$

$$= \underline{x}\left(Ax + B/2\, \underline{y}\right) + \underline{y}\left(\frac{B}{2}\underline{x} + Cy\right)$$

$$= Ax^2 + \underbrace{\frac{B}{2}\, yx + \frac{B}{2}\, xy}_{} + Cy^2$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

$$q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \qquad q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$q(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz$$

$$[q] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} A & D/2 & F/2 \\ D/2 & B & E/2 \\ F/2 & E/2 & C \end{bmatrix} \end{array}$$

$$q(x,y,z) = f\big((x,y,z), (x,y,z)\big)$$

$$q : \mathbb{R}^{42} \to \mathbb{R}$$

$$q(u_1, \dots, u_{42}) = A_1 u_1^2 + A_2 u_2^2 + \dots + A_{42} u_{42}^2 +$$
$$+ B_{12} u_1 u_2 + B_{13} u_1 u_3 + \cdots$$

$$[q] = \begin{bmatrix} A & B_{12}/2 & B_{13}/2 & & \\ B_{12}/2 & A & & & \\ B_{13}/2 & & A & & \\ & & & A & \\ & & & & A \end{bmatrix}$$

1) Obtenha uma base em que a forma quadrática abaixo seja escrita como soma de quadrados

$$q(x,y) = x^2 - 10xy + y^2$$

Algoritmo:
1) Escrever a matriz simétrica [q]
2) Obter autovalores de [q] através do pol. característico
3) Obter os autovetores associados a cada autovalor.
3a) Se houver mais de um autovetor L.I. associado a um autovalor, ORTOGONALIZAR.
4) Normalizar a base de autovetores.
5) a matriz diagonal será a de autovalores.

1) $q(x,y) = x^2 - 10xy + y^2$

$A = 1$

$B = -10$

$C = 1$

$$[q] = \begin{bmatrix} 1 & 10/2 \\ 10/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Auto valores de [q]:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0$$

$$\lambda = \frac{+2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \frac{+2 \pm \sqrt{100}}{2} = +1 \pm 5$$

Autovalores: $\lambda_1 = 6$

$\lambda_2 = -4$

2 autovalores distintos, cada um com multiplicidade algébrica 1.
cada autovalor está associado a UM autovetor (normalizado)

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftarrow$$

Para $\lambda = 6$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x - 5y \\ -5x + y \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 6x \\ 6y \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$\begin{cases} x - 5y = 6x \\ -5x + y = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 6x - 5y = 6x - 6x \\ -5x + y - 6y = 6y - 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ -5x - 5y = 0 \end{cases} = \quad -x - y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$v_1 = x(1,-1) \qquad \boxed{u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} \text{ normalizado.}$$

para $\lambda = -4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 5y = -4x \\ -5x + y = -4y \end{cases} \Rightarrow \quad 5x - 5y = 0$$

$$x = y$$

$$v_2 = x(1,1) \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$$u_1 \perp u_2$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\rangle = \frac{1}{2}\left(1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\right) = 0.$$

Base: $\{u_1, u_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\} = B$

$$[q]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$[(x,y)]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$q(x,y) = [(x,y)]_B^T [q]_B [(x,y)] = [a \ \ b]\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= 6a^2 - 4b^2$$

$$[I]_C^B = \left[ [v_1] \quad [v_2] \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz mudança de base de uma base ortonormal para outra é matriz ortogonal, ~~ou~~ seja a inversa é a transposta.

$$[I]_B^C = \left([I]_C^B\right)^{-1} = \left([I]_C^B\right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificar:

$$[I]_B^C \, [I]_C^B = \mathbb{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$q(x,y) = 6a^2 - 4b^2$$

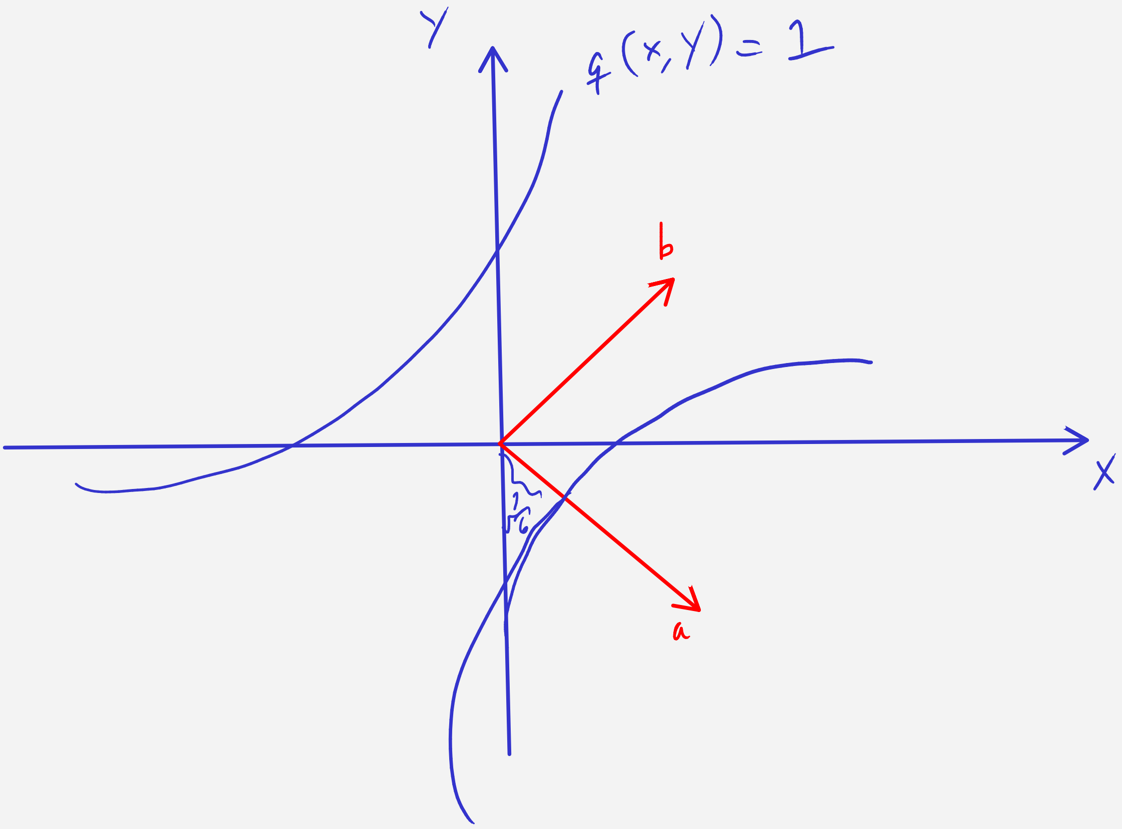
$$q\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = 6a^2 - 4b^2$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_B = [I]_B^C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$q(x,y) = 6a^2 - 4b^2$$
$$= 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\right)^2.$$

$q(x,y) = 1$




$$6a^2 - 4b^2 = 1$$

$$\frac{a^2}{\left(1/\sqrt{6}\right)^2} - \frac{b^2}{\left(1/\sqrt{4}\right)^2} = 1 \quad \text{Hiperbola.}$$