Transformações Lineares

ECT2202 – Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho

Escola de Ciências e Tecnologia
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Definição

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$.
Sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ vetores de V e λ um escalar de $\mathbb{K}$.
Uma transformação $F : V \to W$ é uma *transformação linear* de V em W se e somente se possui as seguintes propriedades:

Aditividade $F(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{v})$

Homogeneidade $F(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda F(\boldsymbol{u})$

Transformação Nula

A transformação nula $O : V \to W$ dada por $O(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo do espaço W é linear:

- $O(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = O(\boldsymbol{u}) + O(\boldsymbol{v})$
- $O(\lambda \boldsymbol{u}) = \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0} = \lambda O(\boldsymbol{u})$

Transformação Nula

A transformação nula $O : V \to W$ dada por $O(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo do espaço W é linear:

- $O(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = O(\boldsymbol{u}) + O(\boldsymbol{v})$
- $O(\lambda \boldsymbol{u}) = \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0} = \lambda O(\boldsymbol{u})$

Transformação Identidade

A transformação Identidade $I : V \to V$ dada por $I(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ é linear:

- $I(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = I(\boldsymbol{u}) + I(\boldsymbol{v})$
- $I(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u} = \lambda I(\boldsymbol{u})$

Transformação Nula

A transformação nula $O : V \to W$ dada por $O(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo do espaço W é linear:

- $O(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = O(\mathbf{u}) + O(\mathbf{v})$
- $O(\lambda \mathbf{u}) = \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0} = \lambda O(\mathbf{u})$

Transformação Identidade

A transformação Identidade $I : V \to V$ dada por $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ é linear:

- $I(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} = I(\mathbf{u}) + I(\mathbf{v})$
- $I(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u} = \lambda I(\mathbf{u})$

Nomenclatura

Uma transformação linear $F : V \to V$, que transforma vetores do espaço V em vetores do mesmo espaço, é chamada de *operador linear* ou *endomorfismo linear*.

Transposta

O operador $T : M_{n \times n} \to M_{n \times n}$ dado por $T(A) = A^T$ que leva uma matriz quadrada $n \times n$ à sua transposta é linear:

- $T(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$
- $T(\lambda A) = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda T(A)$

CIÊNCIAS & TECNOLOGIA UFRN

Operador Derivada

O operador $D : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$, dado por $D(f) = f'$, que leva um polinômio à sua derivada, é linear:

- $D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$
- $D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda D(f)$

Operador Integral

Seja $C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas nos reais. O operador $T : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ dado por

$$[T(f)](x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{dt}$$

é linear:

- $[T(f+g)](x) = \int_0^x (f+g)(t)\, \mathrm{dt} = \int_0^x f(t)\, \mathrm{dt} + \int_0^x g(t)\, \mathrm{dt} = [T(f)](x) + [T(g)](x)$
- $[T(\lambda f)](x) = \int_0^x (\lambda f)(x)\, \mathrm{dt} = \lambda \int_0^x f(t)\, \mathrm{dt} = \lambda [T(f)](x)$

Propriedades

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $F : V \to W$ uma transformação linear.

Transformação do vetor nulo

$$F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

F transforma o vetor nulo do espaço V no vetor nulo do espaço W.

Propriedades

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $F : V \to W$ uma transformação linear.

Transformação do vetor nulo

$$F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

F transforma o vetor nulo do espaço V no vetor nulo do espaço W.

Transformação de subespaços

Se S é subespaço de V, então a imagem de S por F é um subespaço de W.

Propriedades

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $F : V \to W$ uma transformação linear.

Transformação do vetor nulo

$$F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

F transforma o vetor nulo do espaço V no vetor nulo do espaço W.

Transformação de combinação linear

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(\boldsymbol{u}_i)$$

Transformação de subespaços

Se S é subespaço de V, então a imagem de S por F é um subespaço de W.

Propriedades

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $F : V \to W$ uma transformação linear.

Transformação do vetor nulo

$$F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

F transforma o vetor nulo do espaço V no vetor nulo do espaço W.

Transformação de subespaços

Se S é subespaço de V, então a imagem de S por F é um subespaço de W.

Transformação de combinação linear

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(\boldsymbol{u}_i)$$

Transformação de uma base

Se $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ for uma base de V, e $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ vetores quaisquer de W, existe uma *única* transformação linear tal que

$$F(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$$

Conteúdo auxiliar

Visite a página da disciplina:
`https://pessoal.ect.ufrn.br/~elton.carvalho/AL/aulas/12/`

Referências

[1] Carlos A. Callioli, Roberto C. F. Costa, and Hygino H. Domingues.
***Álgebra linear e aplicações*.**
Atual, 6ªedição reformulada edition, 1990.

[2] José Luiz Boldrini.
***Álgebra linear*.**
Harbra, 3ªedição edition, 1980.

[3] Seymour Lipschitz and Marc Lars Lipson.
***Álgebra Linear*.**
Bookman, 4ªedition, 2011.

[4] Kenneth Hoffman and Ray Kunze.
***Linear Algebra*.**
Prentice-Hall, second edition, 1971.

[5] Tom M. Apostol.
***Cálculo, volume 2*.**
Reverté, 1ªedition, 1981.

[6] Gilbert Strang.
***Introduction to linear algebra*.**
Wellesley – Cambridge, 4th international edition, 2009.

[7] Howart Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, 8ªedition, 2001.

[8] David C. Lay.
***Álgebra linear e suas aplicações*.**
LTC, 2ªedition, 1999.