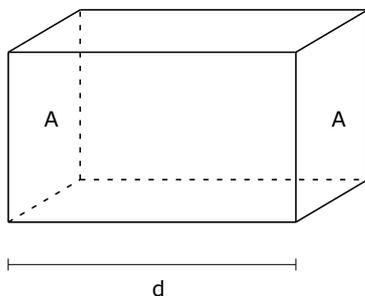


## Capítulo 26

# Equações Diferenciais Parciais

Imagine uma barra reta de comprimento  $L$  e seção transversal com área  $A$ . Suponha que a superfície lateral esteja isolada termicamente e portanto qualquer troca de calor com o ambiente só pode ser feita pelas extremidades da barra. Suponha também por simplicidade que o comprimento  $L$  seja muito maior que a espessura da barra de modo que a barra seja aproximadamente unidimensional, isto é, a variação de qualquer grandeza física em uma direção contida na seção transversal da barra é desprezível.



Se o nosso objeto em questão é um paralelepípedo de seção transversal  $A$  preenchido com um material condutor de calor com placas de área  $A$  a uma distância  $d$  uma da outra como mostra a figura ao lado e as placas são mantidas a temperaturas constantes  $T_1$  e  $T_2$ , pela lei de resfriamento de Fourier haverá uma troca de calor dada por

$$q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d}, \quad (26.1)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica do material que preenche o paralelepípedo.

No caso da barra de comprimento  $L$  e seção transversal  $A$ , orientamos o nosso objeto ao longo do eixo  $x$  com  $x = 0$  em uma ponta e  $x = L$  na outra. Nessa orientação podemos desprezar a dependência nas direções  $y$  e  $z$  da temperatura da barra, ou seja, podemos modelar a temperatura da barra como uma função da posição  $x$  e do tempo  $t$ .

$$T = u(x, t). \quad (26.2)$$

Seja  $t_0$  um instante de tempo qualquer e  $x_0$  um ponto qualquer da barra. O fluxo de calor entre a seção transversal da barra localizada em  $x = x_0$  e a seção transversal localizada em  $x = x_0 + \Delta x$  é dada por

$$q(x_0, t_0) = \frac{kA|u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)|}{\Delta x} . \quad (26.3)$$

Podemos eliminar o módulo desta equação definindo fluxo de calor positivo como um fluxo da esquerda para a direita e um fluxo negativo como um fluxo da direita para a esquerda. Tomando o limite em que  $\Delta x \rightarrow 0$  temos

$$q(x_0, t_0) = -kA \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) . \quad (26.4)$$

Na região da barra entre  $x_0$  e  $x_1$  no intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$  a quantidade de calor que entre é o fluxo na seção transversal da esquerda  $x = x_0$  menos (devido à nossa convenção de sinal) o fluxo na seção transversal da direita  $x = x_1$ , isto é,

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} q(x_1, t) dt \quad (26.5)$$

ou

$$Q = - \int_{t_0}^{t_1} [q(x_1, t) - q(x_0, t)] dt , \quad (26.6)$$

que pelo teorema fundamental do cálculo podemos escrever como

$$Q = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx dt . \quad (26.7)$$

Pela lei de resfriamento de Fourier escrevemos este calor como

$$Q = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} \left( -kA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) dx dt . \quad (26.8)$$

Se a condutividade  $k$  é constante ao longo da barra, assim como a sua seção transversal  $A$ , temos

$$Q = kA \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx dt . \quad (26.9)$$

Esta quantidade de calor que entra nesta seção da barra aumenta a temperatura. Seja  $\bar{T}(t)$  a temperatura média da barra entre  $x_0$  e  $x_1$  dada por

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx . \quad (26.10)$$

A variação desta temperatura entre os instantes  $t_0$  e  $t_1$  obedece

$$Q = mc\Delta T = mc(\bar{T}(t_1) - \bar{T}(t_0)) , \quad (26.11)$$

onde  $c$  é o calor específico da barra e  $m$  a sua massa. Se a barra possui densidade constante, então na região em questão temos  $m = \rho A(x_1 - x_0)$  e

$$Q = \rho A(x_1 - x_0)c \cdot \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} (u(x, t_1) - u(x, t_0)) dx , \quad (26.12)$$

que pelo teorema fundamental do cálculo escrevemos como

$$Q = \rho A c \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt . \quad (26.13)$$

Comparando os resultados temos

$$\rho A c \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = k A \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx dt , \quad (26.14)$$

que podemos escrever como uma única integral

$$A \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \rho c \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right] dx dt = 0 . \quad (26.15)$$

Esta expressão deve ser válida para todo  $A$ , todo instante  $t_0$  e  $t_1$  e em qualquer seção de  $x_0$  a  $x_1$ . Portanto a função que estamos integrando deve ser identicamente nula, ou seja,

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 . \quad (26.16)$$

Agrupando todas essas constantes em uma só temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) , \quad (26.17)$$

onde  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$  é a difusibilidade térmica.

## 26.1 Método de separação de variáveis

Como visto, a função que modela a temperatura de uma barra  $u(x, t)$  deve obedecer à equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) , \quad (26.18)$$

que é uma equação diferencial parcial linear homogênea de segunda ordem conhecida como *equação do calor* ou *equação de difusão*.

É simples verificar que a solução identicamente nula  $u(x, t) = 0$  é uma solução da equação do calor. Estamos interessados nas soluções não nulas. O método de separação de variáveis ou *método de Fourier* consiste em procurar soluções separáveis, isto é, funções da forma

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) . \quad (26.19)$$

Substituindo este Ansatz na equação diferencial temos

$$\frac{\partial}{\partial t} (X(x) \cdot T(t)) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} (X(x) \cdot T(t)) \quad (26.20)$$

ou

$$X(x) \cdot T'(t) = \alpha X''(x) \cdot T(t) . \quad (26.21)$$

Como procuramos por soluções não nulas, podemos dividir a equação diferencial por  $\alpha u(x, t)$  e obter

$$\frac{X(x) \cdot T'(t)}{\alpha X(x) \cdot T(t)} = \frac{\alpha X''(x) \cdot T(t)}{\alpha X(x) \cdot T(t)} \quad (26.22)$$

que simplificamos como

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} . \quad (26.23)$$

O lado esquerdo desta equação é uma função apenas da variável  $t$  e portanto não pode depender de  $x$ , enquanto o lado direito é uma função apenas da variável  $x$  e não pode depender de  $t$ . Então cada lado da equação deve ser uma constante, isto é, existe um número real  $\sigma$  tal que

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma . \quad (26.24)$$

Esta constante  $\sigma$  é chamada de *constante de separação*. As funções  $T(t)$  e  $X(x)$  devem ser soluções das equações diferenciais ordinárias

$$T'(t) - \sigma \alpha T(t) = 0 , \quad (26.25)$$

e

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0 . \quad (26.26)$$

A solução para  $T(t)$  é simples,

$$T(t) = c_0 e^{\sigma \alpha t} \quad (26.27)$$

onde  $c_0$  é uma constante por enquanto arbitrária. A solução para  $X(x)$  depende do sinal da constante  $\sigma$ . Se  $\sigma > 0$  escrevemos  $\sigma = +k^2$  e as soluções são

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} . \quad (26.28)$$

Se  $\sigma = 0$ ,

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad (26.29)$$

e se  $\sigma < 0$  escrevemos  $\sigma = -k^2$  e

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) . \quad (26.30)$$

## 26.2 Problemas de valor de contorno

Pela teoria das equações diferenciais ordinárias precisamos de duas condições iniciais para determinar os valores de  $C_1$  e  $C_2$ . No caso de uma equação de movimento dada pela segunda lei de Newton normalmente impomos duas condições iniciais como a posição inicial e a velocidade inicial da partícula no instante  $t = t_0$ .

O problema da condução de calor em uma barra é melhor modelado impondo alguma destas condições em cada ponta da barra. Por tratar de condições nas bordas do domínio em  $x$  da solução  $u(x, t)$ , estas condições são chamadas de *condições de contorno* e o problema de encontrar soluções de uma equação diferencial que satisfazem certas condições de contorno se chama *problema de valor de contorno*.

Se o domínio em  $x$  da solução  $u(x, t)$  é o intervalo  $[0, L]$ , as condições mais simples são fixar o valor da função nas pontas ou fixar a derivada da função nas pontas. No primeiro caso impomos que a função satisfaça as condições

$$u(0, t) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad u(L, t) = \alpha_2 , \quad (26.31)$$

também conhecidas como *condições de Dirichlet*, e no segundo caso impomos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \alpha_2 , \quad (26.32)$$

condições estas conhecidas como *condições de Neumann*. Os valores  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  podem ser constantes ou no máximo funções de  $t$ . Podemos também misturar estes casos e impor

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad u(L, t) = \alpha_2 \quad (26.33)$$

ou

$$u(0,t) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \alpha_2, \quad (26.34)$$

casos estes chamados de *condições mistas*.

### 26.2.1 Condições de Dirichlet

Trateremos do caso mais simples que podemos impor para encontrar soluções da equação do calor. Imagine que a temperatura da barra nas pontas tem o mesmo valor da temperatura ambiente e que essa temperatura pode ser escolhida como zero (em relação a alguma escala qualquer, não o zero absoluto). Neste caso temos as condições de Dirichlet

$$u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0. \quad (26.35)$$

De acordo com o método de Fourier escrevemos  $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ , então as condições de contorno implicam

$$X(0) \cdot T(t) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) \cdot T(t) = 0. \quad (26.36)$$

Esta equação deve ser satisfeita para todo  $t > t_0$ . Então se impusermos  $T(t) = 0$  automaticamente a solução encontrada é a solução trivial  $u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = 0$ . No entanto estamos procurando por soluções não triviais (inclusive dividimos a equação diferencial por  $X(x) \cdot T(t)$ ), portanto as soluções não nulas da equação diferencial parcial devem satisfazer as condições de contorno

$$X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0. \quad (26.37)$$

Com estas condições de contorno podemos calcular as soluções para a função  $X(x)$  da equação diferencial  $x''(x) - \sigma X(x) = 0$ . No caso em que  $\sigma > 0$  temos  $\sigma = +k^2$  e

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}. \quad (26.38)$$

A condição  $X(0) = 0$  implica  $C_1 + C_2 = 0$ . Escrevendo  $C_2 = -C_1$  temos

$$X(x) = C_1 (e^{kx} - e^{-kx}) = 2C_1 \sinh(kx). \quad (26.39)$$

A condição  $X(L) = 0$  implica

$$2C_1 \sinh(kL) = 0. \quad (26.40)$$

A função seno hiperbólico é uma função biunívoca que se anula somente se o argumento é nulo. No entanto  $k$  por hipótese é diferente de zero, pois neste caso a solução não seria exponenciais. Além disso,  $L > 0$  porque senão não teríamos uma barra para modelar. Então a segunda condição de contorno implica  $C_1 = 0$  e que por sua vez implica  $X(x) = 0$  e  $u(x, t) = 0$ . Portanto não existe uma solução não trivial deste problema de valor de contorno com a constante de separação  $\sigma$  positiva.

No caso em que  $\sigma = 0$  a solução da equação diferencial ordinária é

$$X(x) = C_1x + C_2 . \quad (26.41)$$

A condição  $X(0) = 0$  implica  $C_2 = 0$  e  $X(x) = C_1x$ . A condição  $X(L) = 0$  implica

$$C_1L = 0 . \quad (26.42)$$

Como  $L > 0$  esta condição implica  $C_1 = 0$ ,  $X(x) = 0$  e  $u(x, t) = 0$ . Não existe solução não trivial deste problema de valor de contorno com constante de separação  $\sigma$  nula.

Finalmente no terceiro caso, temos  $\sigma = -k^2 < 0$  e as soluções da equação diferencial ordinária são escritas como

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) . \quad (26.43)$$

A condição  $X(0) = 0$  implica

$$X(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 = 0 . \quad (26.44)$$

Assim a solução deve ser da forma

$$X(x) = C_2 \sin(kx) . \quad (26.45)$$

A segunda condição de contorno  $x(L) = 0$  implica

$$C_2 \sin(kL) = 0 . \quad (26.46)$$

Se  $C_2 = 0$  encontramos novamente a solução trivial e esgotamos as possibilidades de solução não nula do problema de valor de contorno. Para encontrar uma solução não trivial precisamos impor  $\sin(kL) = 0$ , mas agora esta função possui infinitos zeros desde que  $kL = n\pi$  onde  $n$  é um número inteiro. Portanto para cada  $n$  inteiro positivo existe uma solução do problema de valor de contorno

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0 , \quad X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0 \quad (26.47)$$

na forma

$$X_n(x) = \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (26.48)$$

Estas funções são chamadas de *autofunções* do problema de valor de contorno. Os valores permitidos para a constante de separação são

$$\sigma_n = -k^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad (26.49)$$

e são chamados de *autovalores* do problema de valor de contorno.

Para cada autovalor  $\sigma_n$  há uma solução correspondente para a função  $T(t)$  dada por

$$T_n(t) = C_0 e^{\sigma_n \alpha t} = C_0 e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t} \quad (26.50)$$

e a solução correspondente da equação do calor é

$$u_n(x, t) = C_n e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (26.51)$$

onde a constante  $C_n$  absorve as constantes arbitrárias  $C_0$  e  $C_2$ .

Pelo princípio de superposição uma combinação linear de soluções da equação diferencial parcial é também uma solução da mesma equação diferencial parcial. Podemos assim escrever a solução geral como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (26.52)$$

Os termos  $n \leq 0$  foram excluídos porque não são linearmente independentes dos termos já escritos.

As infinitas constantes arbitrárias são determinadas pela condição inicial. Imagine que no instante inicial  $t = 0$  a barra possui uma temperatura inicial dada por uma função conhecida  $f(x)$ , isto é,

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L]. \quad (26.53)$$

Substituindo  $t = 0$  na solução geral temos

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (26.54)$$

Imagine que a temperatura inicial seja dada pela função  $f(x) = 8 \text{sen} \left( \frac{3\pi x}{L} \right)$ , então a condição inicial implica

$$8 \text{sen} \left( \frac{3\pi x}{L} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (26.55)$$

que possui uma solução óbvia  $C_3 = 8$  e  $C_n = 0$  se  $n \neq 3$ . Neste caso a solução da equação do calor é

$$u(x,t) = 8e^{-\alpha \frac{9\pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi x}{L} \right). \quad (26.56)$$

Se a condição inicial for agora

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{L} \right) + 5 \operatorname{sen} \left( \frac{4\pi x}{L} \right) \quad (26.57)$$

existe uma solução da equação do calor com  $C_2 = 2$ ,  $C_4 = 5$  e com os demais  $C_n$  nulos. Neste caso a solução é

$$u(x,t) = 2e^{-\alpha \frac{4\pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{L} \right) + 5e^{-\alpha \frac{16\pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left( \frac{4\pi x}{L} \right). \quad (26.58)$$

No entanto podemos nestes casos afirmar que as escolhas de constantes são únicas? Além disso nos casos mencionados as condições iniciais foram convenientemente escolhidas como combinações lineares de autofunções do problema de valor de contorno

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0. \quad (26.59)$$

Como encontrar uma solução da equação do calor se a condição inicial não for uma combinação finita de autofunções deste problema de valor de contorno, como a parábola  $f(x) = Ax(L-x)$ ? Suponha também que em um determinado problema temos uma combinação infinita das soluções  $u_n(x,t)$ . Para quais valores de  $x$  e  $t$  a série infinita de funções converge? Esta convergência é pontual ou uniforme?

### 26.2.2 Condições de Neumann

O próximo caso de condições de contorno chama-se condições de Neumann. Ao invés de fixar a temperatura das barras supomos que o fluxo de calor nas pontas é nulo, que implica as condições

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \quad (26.60)$$

De acordo com o método de Fourier escrevemos  $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ , então as condições de contorno implicam

$$X'(0) \cdot T(t) = 0 \quad \text{e} \quad X'(L) \cdot T(t) = 0. \quad (26.61)$$

Como no caso anterior, as condições de contorno devem ser satisfeitas para todo  $t > t_0$ . Se  $T(t) = 0$  concluímos que  $u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = 0$ . Como estamos procurando por soluções não triviais, as condições de contorno implicam

$$X'(0) = 0 \quad \text{e} \quad X'(L) = 0. \quad (26.62)$$

Calculamos agora as soluções da equação diferencial

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0. \quad (26.63)$$

Se  $\sigma > 0$  escrevemos  $\sigma = +k^2$  e

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}. \quad (26.64)$$

A condição de contorno de Neumann deve ser aplicada na derivada desta função.

$$X'(x) = C_1 k e^{kx} - C_2 k e^{-kx}. \quad (26.65)$$

A condição  $X'(0) = 0$  implica  $k(C_1 - C_2) = 0$ . Como  $k$  deve ser diferente de zero, temos que  $C_2 = C_1$  e

$$X(x) = C_1 (e^{kx} + e^{-kx}) = 2C_1 \cosh(kx). \quad (26.66)$$

A condição  $X'(L) = 0$  implica

$$2C_1 k \sinh(kL) = 0. \quad (26.67)$$

A função seno hiperbólico é uma função biunívoca que se anula somente se o argumento é nulo. Então se  $k \neq 0$  e  $L \neq 0$ , a constante  $C_1$  é necessariamente nula e não existe uma solução não trivial deste problema de valor de contorno com a constante de separação  $\sigma$  positiva.

Se  $\sigma = 0$  a solução da equação diferencial ordinária é

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad (26.68)$$

com derivada

$$X'(x) = C_1. \quad (26.69)$$

A condição  $X'(0) = 0$  implica  $C_1 = 0$  e a condição  $X'(L) = 0$  implica também que  $C_1 = 0$ . Qualquer função constante é uma solução da equação diferencial para  $X(x)$  com condições de contorno de Neumann. Logo existe um autovalor nulo deste problema de valor de contorno com autofunção

$$X_0(x) = 1. \quad (26.70)$$

Finalmente se  $\sigma < 0$  escrevemos  $\sigma = -k^2$  e as soluções da equação diferencial ordinária são escritas como

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \operatorname{sen}(kx), \quad (26.71)$$

com derivada

$$X'(x) = -C_1 k \operatorname{sen}(kx) + C_2 k \cos(kx), \quad (26.72)$$

A condição  $X'(0) = 0$  implica

$$X'(0) = -C_1 k \operatorname{sen}(0) + k C_2 \cos(0) = k C_2 = 0. \quad (26.73)$$

Como  $k \neq 0$  por hipótese,  $C_2 = 0$ . Assim a solução deve ser da forma

$$X(x) = C_1 \cos(kx). \quad (26.74)$$

A segunda condição de contorno  $x'(L) = 0$  implica

$$-k C_1 \operatorname{sen}(kL) = 0. \quad (26.75)$$

É possível termos solução com  $C_1 \neq 0$  desde que  $\operatorname{sen}(kL) = 0$ , o que ocorre sempre que  $kL = n\pi$  com  $n$  inteiro. Portanto para cada  $n$  inteiro positivo existe um autovalor negativo

$$\sigma_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (26.76)$$

com autofunção

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.77)$$

Para cada autovalor  $\sigma_n$  há uma solução correspondente para a função  $T(t)$  dada por

$$T_n(t) = C_0 e^{\sigma_n t} = C_0 e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad (26.78)$$

e a solução correspondente da equação do calor é

$$u_n(x, t) = C_n e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26.79)$$

se  $n > 0$  e

$$u_0(x, t) = C_0, \quad (26.80)$$

onde as constantes  $C_n$  absorvem as demais constantes arbitrárias.

Pelo princípio de superposição uma combinação linear de soluções da equação diferencial parcial é também uma solução da mesma equação diferencial parcial. Podemos assim escrever a solução geral como

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.81)$$

As infinitas constantes arbitrárias são determinadas pela condição inicial

$$u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L]. \quad (26.82)$$

Substituindo  $t = 0$  na solução geral temos

$$u(x,0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.83)$$

Podemos determinar os valores das constantes  $C_n$  desde que a condição inicial seja uma constante mais uma combinação linear de cossenos. Voltamos ao mesmo problema das condições de Dirichlet. Como determinar a solução do problema da condução do calor com condições iniciais arbitrárias? Quais condições iniciais podem ser escritas como combinações lineares de cossenos? Esta combinação é finita ou infinita? Caso seja infinita, há uma convergência pontual ou uniforme?

## 26.3 Série de Fourier

No estudo da condução do calor em uma barra de comprimento  $L$  vimos que a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (26.84)$$

sob condições de contorno de Dirichlet  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  admite soluções em termos das autofunções  $X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e sob condições de contorno de Neumann  $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$  admite soluções em termos das autofunções  $X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ . No entanto para resolver completamente o problema é necessário escrever a condição inicial em termos destas autofunções, então devemos investigar quais funções podem de fato ser escritas desta maneira e se há condições suficientes para tal.

Estas autofunções possuem diversas propriedades interessantes. Entre elas, se  $n$  e  $m$  são números inteiros positivos, então

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (26.85)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases} \quad (26.86)$$

e

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases} \quad (26.87)$$

Além disso

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (26.88)$$

Seja  $V$  o espaço vetorial das funções integráveis no intervalo  $[-L, L]$  com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx. \quad (26.89)$$

Pelas relações vistas o conjunto de funções

$$\{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots\} \quad (26.90)$$

com

$$u_0(x) = 1, \quad u_{2n}(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ dx e } u_{2n-1}(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ dx} \quad (26.91)$$

é um conjunto ortogonal. Como cada elemento deste conjunto é não-nulo pois, possui norma positiva, o conjunto é linearmente independente.

Outra propriedade importante é que elas são periódicas, isto é, existe um período  $T > 0$  tal que

$$u_n(x+T) = u_n(x), \quad \forall n \geq 0. \quad (26.92)$$

Para  $u_0(x) = 1$ , que é uma função constante, esta propriedade é válida para todo período  $T$  real. Já para as outras funções temos que encontrar  $T$  tal que

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+T)\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26.93)$$

para todo valor real de  $x$ . Pela propriedade do seno de uma soma escrevemos esta última equação como

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.94)$$

As funções que aparecem na equação anterior são linearmente independentes, então a única maneira desta igualdade ser satisfeita para todo valor de  $x$  é com

$$\cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 0. \quad (26.95)$$

O menor valor positivo que satisfaz estas condições é

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi \implies T = \frac{2L}{n}. \quad (26.96)$$

Cada função  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é uma função periódica de período  $\frac{2L}{n}$ , assim como as funções  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ . Se uma função é periódica de período  $T$  ela deve também ser periódica de período  $kT$  com qualquer  $k$  inteiro. Portanto podemos dizer que as funções do conjunto

$$\{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots\} \quad (26.97)$$

são todas periódicas de período  $2L$ .

Seja  $f(x)$  um elemento do espaço gerado por estas funções. Então podemos escrevê-la como uma combinação linear destas autofunções na forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (26.98)$$

Como a base é ortogonal, é trivial calcular os coeficientes

$$a_0 = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (26.99)$$

$$a_n = \frac{\langle f(x), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \rangle}{\langle \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \rangle} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (26.100)$$

$$b_n = \frac{\langle f(x), \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \rangle}{\langle \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \rangle} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (26.101)$$

Curiosamente se substituirmos  $n = 0$  na fórmula dos coeficientes  $a_n$  temos

$$a_{n=0} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(0) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (26.102)$$

que é o dobro da fórmula encontrada para o cálculo de  $a_0$ . Se quisermos aproveitar esta fórmula para o cálculo também do  $a_0$  podemos redefinir a expansão como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (26.103)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall n \geq 0 \quad (26.104)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall n > 0. \quad (26.105)$$

Esta expansão de  $f(x)$  em termos de funções trigonométricas é chamada de *Série de Fourier* de  $f(x)$  e os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  assim definidos são chamados de *coeficientes de Fourier*.

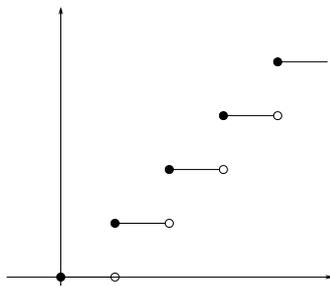
Ainda não sabemos quais as condições que uma função  $f(x)$  tenha que satisfazer para que ela possa ser escrito como na equação (26.103), mas mesmo assim podemos definir a série de Fourier de uma função periódica de período  $2L$  qualquer como a *projeção* no espaço gerado pelas funções

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \dots \right\}. \quad (26.106)$$

Pelo teorema da aproximação a projeção de uma função no espaço gerado por um conjunto  $S$  é o elemento de  $G(S)$  que minimiza o erro  $\|f(x) - \text{proj}_{G(S)}(f(x))\|$ , mas não garante que o erro seja nulo. O erro é nulo somente se o vetor original pertence a  $G(S)$ .

Evidentemente para que a projeção possa ser calculada as integrais dadas pelas equações (26.104) e (26.105) devem existir. As funções trigonométricas são contínuas, então para os coeficientes existirem basta que a função  $f$  seja integrável. Pelo critério de integrabilidade de Lebesgue, uma função é integrável no intervalo  $[-L, L]$  se e somente se ela for limitada e o conjunto de discontinuidades tiver medida nula. Um exemplo simples de conjunto de medida nula num intervalo é um conjunto finito de pontos. Funções que são limitadas em um intervalo fechado e contínuas exceto talvez em um número finito de pontos são chamadas de *funções seccionalmente contínuas*.

**Exemplo 26.1** (Função degrau).

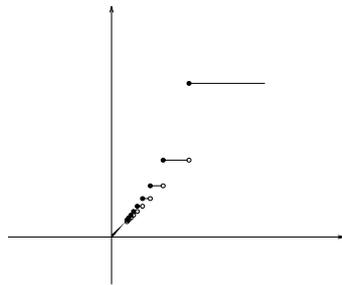


A função

$$f(x) = k, \quad \text{se } x \in [k, k+1) \quad (26.107)$$

é descontínua em cada número inteiro, mas como qualquer intervalo  $[a, b]$  contém um número finito de elementos inteiros e  $f(x)$  é limitada pelo maior número inteiro menor ou igual a  $b$ , esta função é seccionalmente contínua em qualquer intervalo  $[a, b]$ .

**Exemplo 26.2.**



Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{n}, & \text{se } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (26.108)$$

Esta função é limitada, mas possui um número infinito de discontinuidades no intervalo  $[0, 1]$ , portanto não definiremos esta função como seccionalmente contínua neste intervalo.

Sempre que  $f$  é uma função seccionalmente contínua e periódica de período  $2L$  podemos calcular a projeção no espaço dos elementos da série de Fourier. Se

a função não for periódica, como por exemplo,  $f(x) = e^x$ , as integrais dadas pelos coeficientes da série de Fourier existem. No entanto a projeção calculada para  $e^x$  será uma função que melhor aproxima a função  $e^x$  no intervalo  $[-L, +L]$  e será periódica de período  $2L$ , como mostra a figura 26.1

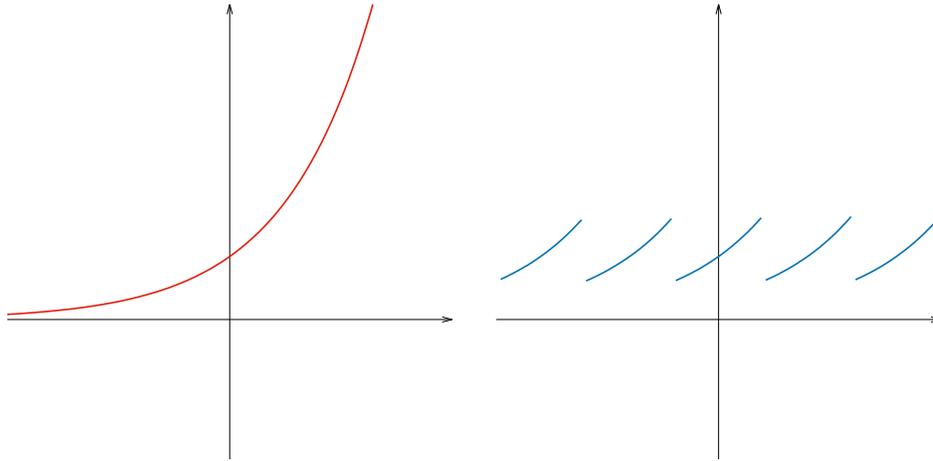
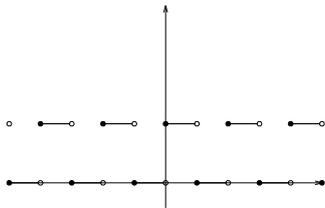


Figura 26.1: À esquerda temos o gráfico da função exponencial. Na direita temos a função exponencial no intervalo  $[-L, L]$  e periódica de período  $2L$ .

**Exemplo 26.3.**

Seja a função



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases} \tag{26.109}$$

e fora deste intervalo ela é periódica de período  $2\pi$ , como mostra a figura ao lado.

Neste caso temos  $L = \pi$  e a projeção que queremos calcular é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sen(nx)) \tag{26.110}$$

com

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = 1, \tag{26.111}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = 0 \quad (26.112)$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n). \end{aligned} \quad (26.113)$$

Se  $n$  for um número par o termo  $b_n$  correspondente é nulo e se  $n$  é ímpar o numerador pode ser simplificado como 2. Assim  $b_{2n}=0$  e  $b_{2n-1} = \frac{2}{\pi(2n-1)}$  e

$$\operatorname{proj}(f(x)) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}(nx) \quad (26.114)$$

ou

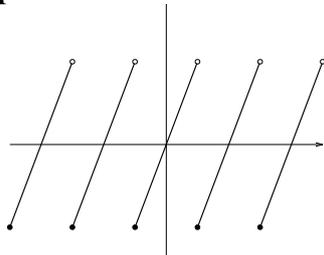
$$\operatorname{proj}(f(x)) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen}((2n-1)x). \quad (26.115)$$

No ponto  $x = 0$  a função  $f(x)$  está definida como  $f(0) = 1$ . Neste ponto a função não é contínua, mas mesmo assim a série de Fourier converge para um valor real. Substituindo  $x = 0$  em qualquer expressão encontrada as funções seno se anulam, ou seja,

$$\operatorname{proj}(f(x))|_{x=0} = \frac{1}{2}, \quad (26.116)$$

que é diferente do valor da função e de qualquer um dos limites laterais.

#### Exemplo 26.4.



Os coeficientes  $a_n$  de Fourier são

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0, \quad (26.118)$$

Seja agora a função definida como

$$f(x) = x, \quad \text{se } -\pi \leq x \leq \pi \quad (26.117)$$

e periódica de período  $2\pi$ . O gráfico desta função é mostrado na figura ao lado.

e

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0, \quad (26.119)$$

pois são funções ímpares em intervalos simétricos. Os termos  $b_n$  valem

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} x \left( -\frac{\cos(nx)}{n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \left( -\frac{\cos(nx)}{n} \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} x \left( -\frac{\cos(nx)}{n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{\pi \cos(n\pi)}{\pi} - \frac{-\pi \cos(n\pi)}{\pi} + \frac{1 \operatorname{sen}(n\pi)}{\pi n^2} - \frac{1 \operatorname{sen}(n\pi)}{\pi n^2} \\ &= -\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned} \quad (26.120)$$

Logo a série de Fourier da função  $f(x) = x$  no intervalo  $[-\pi, +\pi)$  e periódica fora deste intervalo é dada por

$$\operatorname{proj}(f(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx). \quad (26.121)$$

Note que em  $x = \pi$  a função é descontínua e a série de Fourier converge para  $\operatorname{proj}(f(\pi)) = 0$ , que é a média dos limites laterais.

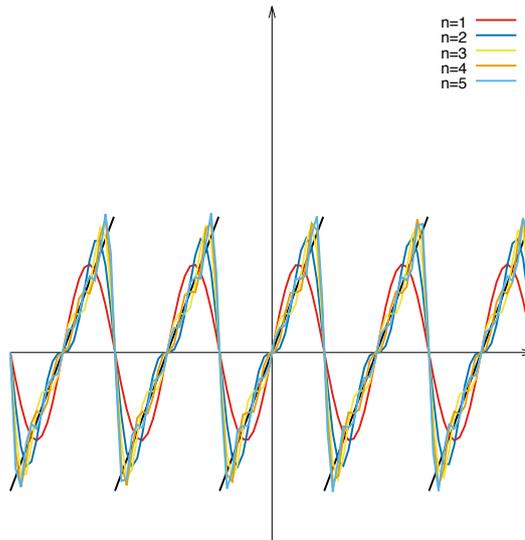
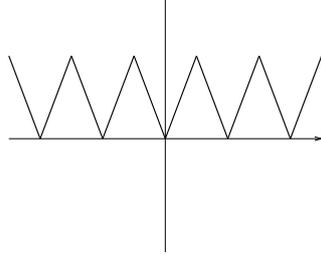


Figura 26.2: Primeiros termos da série de Fourier da função  $f(x) = x$ .

**Exemplo 26.5.**

Por fim, queremos agora calcular a série de Fourier da função

$$f(x) = |x|, \quad \text{se } -\pi \leq x \leq \pi \quad (26.122)$$

e periódica de período  $2\pi$  como mostra a figura ao lado.

Agora esta função é par e portanto todos os coeficientes  $b_n$  são nulos, pois são integrais de uma função ímpar em um intervalo simétrico. Já os coeficientes  $a_n$  são dados por

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi \quad (26.123)$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} x \frac{\text{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{\text{sen}(nx)}{n} dx \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Se  $n$  for par o termo  $a_n$  correspondente é nulo, enquanto se  $n$  é ímpar, o termo pode ser simplificado, isto é,

$$a_{2n} = 0 \quad \text{e} \quad a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi(2n-1)^2}. \quad (26.124)$$

Assim a série de Fourier da função  $f(x) = |x|$  no intervalo  $[-\pi, +\pi]$  e periódica fora dele é dada por

$$\text{proj}(f(x)) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}. \quad (26.125)$$

A figura 26.3 mostra o comportamento dos primeiros termos da soma parcial da série de Fourier. Apesar da função ser contínua, nos pontos em que a derivada é descontínua a convergência é mais lenta que no outros pontos.

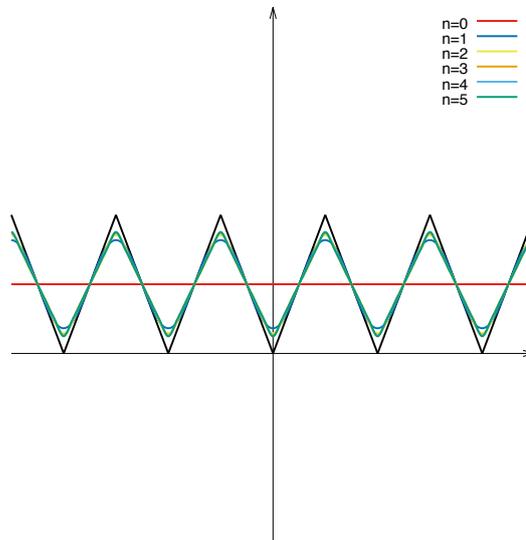


Figura 26.3: Primeiros termos da série de Fourier da função  $f(x) = |x|$ .

Se estivéssemos interessados numa aproximação para a função  $f(x) = x$  no intervalo  $(0, 1)$ , os dois exemplos mencionados seriam capazes de calcular tal aproximação. O primeiro exemplo é uma decomposição apenas em funções  $\sin(nx)$  que são ímpares, mas na vizinhança do ponto  $x_0 = \pi$  podemos notar que a convergência é lenta devido ao *fenômeno de Gibbs*. Já no segundo exemplo temos apenas funções pares do tipo  $\cos(nx)$  e além de não exibir o fenômeno de Gibbs a convergência desta série de funções é uniforme. No entanto o critério para escolher quais destas expansões escolhemos depende de condições físicas sobre o problema que queremos modelar, como veremos mais tarde.

### 26.3.1 Convergência pontual da Série de Fourier

Seja

$$S = \{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots\} \quad (26.126)$$

o conjunto infinito de funções  $u_n(x)$  dadas por  $u_0(x) = 1$  e

$$u_{2n}(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ e } u_{2n-1}(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26.127)$$

para  $n \geq 1$ . Definindo o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \quad (26.128)$$

verificamos que o conjunto  $S$  é ortogonal e como cada elemento é não nulo concluímos que  $S$  é linearmente independente.

Seja  $f(x)$  uma função integrável no intervalo fechado  $[-L, L]$  e periódica de período  $2L$ . Definimos a série de Fourier como a projeção de  $f$  no espaço gerado pelo conjunto  $S$  da forma

$$\text{proj}_{G(S)}(f(x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (26.129)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy. \quad (26.130)$$

Nos exemplos já vistos, a série de Fourier parece convergir para a  $f(x)$  se a função é contínua. Quando a função é descontínua em algum ponto, a série de Fourier parece convergir para a média dos limites laterais. Definimos então

$$f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h) \quad \text{e} \quad f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h). \quad (26.131)$$

Uma função é contínua se e somente se  $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$ . Já no caso de uma função descontínua com limites laterais finitos, a média destes limites vale

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]. \quad (26.132)$$

Esta média é igual a  $f(x)$  nos pontos que em  $f$  é contínua, então podemos dizer que nos exemplos vistos a série de Fourier parece convergir para esta média em todos os pontos calculados.

Pelo teorema da aproximação esta projeção é o elemento de  $G(S)$  que minimiza o erro

$$E(x) = \text{proj}_{G(S)}(f(x)) - \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] , \quad (26.133)$$

mas este erro é nulo somente se a função periódica e integrável  $f(x)$  é um elemento de  $G(S)$ . Queremos saber quais condições uma função deve satisfazer para que este erro seja nulo.

Seja  $S_k(x)$  a soma parcial

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] . \quad (26.134)$$

A diferença entre o valor para o qual a série de Fourier parece convergir e  $S_k(x)$  é chamado de erro parcial e dado por

$$E_k(x) = S_k(x) - \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] . \quad (26.135)$$

Se provarmos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k(x) = 0$  provamos então que a série de Fourier de fato converge para  $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$ . Como sabemos calcular os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  pela equação (26.130), podemos calcular a soma parcial como

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{n=1}^k \left[ \left( \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \int_{-L}^L \left\{ \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^k \left[ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right] \right\} f(y) dy \\ &= \int_{-L}^L \left[ \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-y)\right) \right] f(y) dy , \end{aligned} \quad (26.136)$$

que podemos escrever de forma mais simples como

$$S_k(x) = \int_{-L}^L D_k(x-y) f(y) dy \quad (26.137)$$

onde a função

$$D_k(x) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26.138)$$

é chamada de *Núcleo de Dirichlet*.

**Teorema 26.1.**

*O Núcleo de Dirichlet possui as seguintes propriedades:*

1.  $D_k(x)$  é uma função par, contínua e periódica de período  $2L$ ;
- 2.

$$D_k(0) = \frac{1}{L} \left(k + \frac{1}{2}\right) \quad e \quad \int_{-L}^L D_k(x) dx = 1 ; \quad (26.139)$$

- 3.

$$D_k(x) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen} \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\text{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right)} \quad (26.140)$$

se  $x$  não é um múltiplo inteiro de  $2L$ .

*Demonstração.* A propriedade 1 é trivial, pois a função  $D_k(x)$  é uma combinação linear finita de funções pares, contínuas e periódicas de período  $2L$ .

A propriedade 2 é simples, pois

$$D_k(0) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^k 1 = \frac{1}{2L} + \frac{k}{L} = \frac{1}{L} \left(k + \frac{1}{2}\right) \quad (26.141)$$

e

$$\int_{-L}^L D_k(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1 \quad (26.142)$$

pelas próprias relações de ortogonalidade destas funções.

A propriedade 3 é um pouco mais trabalhosa de se demonstrar. Sabemos que

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen}(A) \cos(B) + \cos(A) \text{sen}(B) \quad e \quad (26.143)$$

$$\text{sen}(A - B) = \text{sen}(A) \cos(B) - \cos(A) \text{sen}(B) . \quad (26.144)$$

Subtraindo estas expressões temos

$$\text{sen}(A + B) - \text{sen}(A - B) = 2 \cos(A) \text{sen}(B) . \quad (26.145)$$

Escolhendo  $A = \frac{n\pi x}{L}$  e  $B = \frac{\pi x}{2L}$  temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) = 2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right). \quad (26.146)$$

Somando os elementos da última equação de  $n = 1$  até  $k$  temos

$$\sum_{k=1}^n \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right] = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.147)$$

O lado esquerdo é uma soma telescópica, portanto

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (26.148)$$

Se  $x$  não é um múltiplo inteiro de  $2L$  podemos dividir os dois lados da equação por  $2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$  e obter

$$\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} - \frac{1}{2}. \quad (26.149)$$

Substituindo esta expressão para a somatória na fórmula do núcleo de Dirichlet temos

$$D_k(x) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \left[ \frac{1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}. \quad (26.150)$$

□

Voltando à soma parcial  $S_k(x)$ , temos que

$$S_k(x) = \int_{-L}^L D_k(x-y)f(y)dy. \quad (26.151)$$

Com a mudança de variáveis  $y = x - t$ , escrevemos a soma parcial como

$$S_k(x) = \int_{x+L}^{x-L} D_k(t)f(x-t)(-dt) = \int_{-L+x}^{L+x} D_k(t)f(x-t)dt. \quad (26.152)$$

Como tanto  $D_k(t)$  e  $f(x-t)$  são periódicas de período  $2L$  podemos escrever a integral como

$$S_k(x) = \int_{-L}^L D_k(t)f(x-t)dt. \quad (26.153)$$

Pela aditividade da integral

$$S_k(x) = \int_{-L}^0 D_k(t)f(x-t)dt + \int_0^L D_k(t)f(x-t)dt . \quad (26.154)$$

Na integral calculada no intervalo  $[-L, 0]$  fazemos a mudança de variáveis  $t' = -t$  resultando em

$$S_k(x) = \int_L^0 D_k(-t')f(x+t')(-dt') + \int_0^L D_k(t)f(x-t)dt . \quad (26.155)$$

Utilizando a propriedade de que  $D_k(t)$  é par e escrevendo  $t' = t$  podemos agrupar as duas integrais na forma

$$S_k(x) = \int_0^L D_k(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt . \quad (26.156)$$

O erro parcial  $E_k(x)$  é dado por

$$E_k(x) = S_k(x) - \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] . \quad (26.157)$$

Como  $D_k(t)$  é par e  $\int_{-L}^L D_k(t)dt = 1$ , podemos escrever

$$E_k(x) = \int_0^L D_k(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - [f(x^+) + f(x^-)] \int_0^L D_k(t)dt \quad (26.158)$$

ou de forma mais simples

$$E_k(x) = \int_0^L D_k(t) [(f(x+t) - f(x^+)) + (f(x-t) - f(x^-))] dt . \quad (26.159)$$

Podemos escrever a função entre colchetes como  $g(x, t)$  e o erro parcial como

$$E_k(x) = \int_0^L D_k(t)g(x, t)dt = \int_0^\delta D_k(t)g(x, t)dt + \int_\delta^L D_k(t)g(x, t)dt \quad (26.160)$$

e mostrar que cada uma destas duas integrais tende a zero no limite em que  $k \rightarrow \infty$ . A integral no intervalo  $[0, \delta]$  tende a zero pelo *teste de Dini* enquanto a integral no intervalo  $[\delta, L]$  tende a zero pelo *lema de Riemann-Lebesgue*.

**Teorema 26.2** (Lema de Riemann-Lebesgue).

*Seja  $f$  uma função integrável e integrável em módulo no intervalo  $[a, b]$ . Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0 . \quad (26.161)$$

*Demonstração.* Se  $f$  é integrável, pela definição de integral sabemos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma partição de  $[a, b]$

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b\} \quad (26.162)$$

tal que

$$S(f, P) - I(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (26.163)$$

lembrando que

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^N M_i \Delta x_i \quad \text{e} \quad I(f, P) = \sum_{i=1}^N m_i \Delta x_i \quad (26.164)$$

com

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}, \quad m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} \quad \text{e} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}. \quad (26.165)$$

Sobre a partição  $P$  escrevemos

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \operatorname{sen}(tx) dx. \quad (26.166)$$

A cada termo desta somatória podemos somar e subtrair a mesma quantidade, resultando em

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \sum_{i=1}^N f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \operatorname{sen}(tx) dx + \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \operatorname{sen}(tx) dx. \quad (26.167)$$

Como  $f(x)$  é limitada, existe um  $M$  real tal que  $|f(x)| < M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Além disso, se  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $|f(x) - f(x_i)| \leq M_i - m_i$ . Pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| &\leq \sum_{i=1}^N |f(x_i)| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)| |\operatorname{sen}(tx)| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^N M \left| -\frac{\cos(tx)}{t} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \left| + \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (M_i - m_i) dx \right. \\ &\leq \sum_{i=1}^N M \frac{2}{t} + \sum_{i=1}^N (M_i - m_i) \Delta x_i, \end{aligned} \quad (26.168)$$

que podemos escrever como

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2MN}{t} + S(f, P) - I(f, P). \quad (26.169)$$

Para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $t$  grande o suficiente tal que

$$\frac{2MN}{t} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (26.170)$$

Portanto para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma partição  $P$  fina o suficiente e  $t$  grande o suficiente de modo que

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (26.171)$$

Logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0. \quad (26.172)$$

A demonstração para o caso  $\cos(tx)$  é idêntica. □

O erro parcial foi escrito como

$$E_k(x) = \int_0^\delta D_k(t) g(x, t) dt + \int_\delta^L D_k(t) g(x, t) dt \quad (26.173)$$

e que manipulamos como

$$E_k(x) = \int_0^\delta (t D_k(t)) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L g(x, t) \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} dt. \quad (26.174)$$

Para utilizar o lema de Riemann-Lebesgue na segunda integral precisamos mostrar que a função  $\frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)}$  é integrável no intervalo  $[\delta, L]$ . O denominador não se nula no intervalo em questão, portanto basta que  $g(x, t)$  seja integrável, isto é,  $f(x)$  deve ser seccionalmente contínua, para que exista um  $k$  grande o suficiente tal que

$$\left| \int_\delta^L g(x, t) \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (26.175)$$

e o problema da convergência desta integral para zero está resolvido.

Agora tratamos da integral no intervalo  $[0, \delta]$ . Queremos que para todo  $\varepsilon > 0$  exista um  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \int_0^\delta (tD_k(t)) \frac{g(x,t)}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (26.176)$$

A função  $(tD_k(t))$  é limitada, pois

$$|tD_k(t)| = \left| \operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} \right| \leq \left| \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} \right|. \quad (26.177)$$

Esta última função é crescente no intervalo  $[0, L]$ , portanto

$$|tD_k(t)| \leq \left| \frac{L}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi L}{2L} \right)} \right| = \frac{1}{2}. \quad (26.178)$$

Portanto

$$\left| \int_0^\delta (tD_k(t)) \frac{g(x,t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_0^\delta \frac{g(x,t)}{t} dt \right|. \quad (26.179)$$

Resta apenas provar que para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que a última integral acima é menor que  $\varepsilon$  para provar a convergência da série de Fourier. Este critério se chama *Teste de Dini*. Se existir um  $M$  real tal que

$$\left| \frac{g(x,t)}{t} \right| < M, \quad (26.180)$$

isto é, se esta razão for limitada, então

$$\left| \int_0^\delta \frac{g(x,t)}{t} dt \right| \leq \int_0^\delta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < M\delta. \quad (26.181)$$

Neste caso basta escolher  $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$ , que é um número positivo caso a função  $\frac{g(x,t)}{t}$  seja de fato limitada. Como  $g(x,t)$  é seccionalmente contínua, o numerador é limitado. Para a razão ser limitada basta que o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x,t)}{t} \quad (26.182)$$

exista. Lembrando de como definimos  $g(x,t)$ , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x,t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(f(x+t) - f(x^+)) + (f(x-t) - f(x^-))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t} = f'(x^+) + f'(x^-). \end{aligned}$$

O teste de Dini é portanto válido se  $f'(x^+)$  e  $f'(x^-)$  são limitadas para todo  $x \in [-L, L]$ , isto é, se a função  $f(x)$  for seccionalmente diferenciável. Isto encerra a demonstração do seguinte teorema.

**Teorema 26.3** (Teorema de Fourier).

*Seja  $f(x)$  uma função periódica de período  $2L$  seccionalmente contínua e seccionalmente diferenciável. Então a série de Fourier de  $f(x)$  converge para a média entre  $f(x^+)$  e  $f(x^-)$ , isto é,*

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (26.183)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad e \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (26.184)$$

### 26.3.2 Convergência uniforme da Série de Fourier

Seja  $f$  uma função que satisfaz as hipóteses do teorema de Fourier. Então a série infinita

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (26.185)$$

converge pontualmente para  $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$ .

A soma parcial é dada por

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (26.186)$$

e nos pontos em que  $f$  é contínua o erro da soma parcial é

$$E_k(x) = f(x) - S_k(x). \quad (26.187)$$

O erro quadrático médio no intervalo  $[-L, L]$  é dado por

$$E_k^2 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (E_k(x))^2 dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x) - S_k(x))^2 dx \quad (26.188)$$

que podemos dividir em três integrais

$$E_k^2 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx - \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) S_k(x) dx + \frac{1}{L} \int_{-L}^L S_k^2(x) dx, \quad (26.189)$$

que podemos escrever como produtos internos na forma

$$E_k^2 = \frac{1}{L} [\langle f, f \rangle - 2\langle f, S_k \rangle + \langle S_k, S_k \rangle]. \quad (26.190)$$

Calculando estes produtos internos temos

$$\begin{aligned} \langle S_k, S_k \rangle &= \int_{-L}^L \left[ \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^k a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) \right] dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{a_0^2}{4} dx + \sum_{m=1}^k \frac{a_0}{2} a_m \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{m=1}^k \frac{a_0}{2} b_m \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^k \frac{a_0}{2} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^k a_n a_m \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^k a_n b_m \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^k \frac{a_0}{2} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^k b_n a_m \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^k b_n b_m \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

De acordo com a relação de ortogonalidade das funções envolvidas, estas diversas integrais apenas três são não nulas. E mesmo as não nulas só possuem termos não nulos quando  $m = n$ . Portanto

$$\langle S_k, S_k \rangle = L \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right). \quad (26.191)$$

O próximo produto interno é

$$\begin{aligned} \langle f, S_k \rangle &= \int_{-L}^L f(x) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^k a_n \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^k b_n \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Cada integral corresponde a um coeficiente de Fourier, resultando em

$$\langle f, S_k \rangle = L \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k a_n^2 + b_n^2 \right). \quad (26.192)$$

Podemos escrever o erro quadrático médio como

$$E_k^2 = \frac{1}{L} \left\{ \langle f, f \rangle - 2 \left[ L \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right) \right] + \left[ L \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k a_n^2 + b_n^2 \right) \right] \right\} \quad (26.193)$$

ou apenas como

$$E_k^2 = \frac{1}{L} \langle f, f \rangle - \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k a_n^2 + b_n^2 \right). \quad (26.194)$$

Como o erro quadrático não pode ser negativo, temos que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx. \quad (26.195)$$

Se esta última integral for um número real a sequência do lado esquerdo é estritamente crescente e limitada superiormente, portanto ela converge para o seu supremo. Está provado o seguinte teorema.

**Teorema 26.4** (Desigualdade de Bessel).

Se  $\langle f, f \rangle \in \mathbb{R}$ , então

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx. \quad (26.196)$$

A desigualdade de Bessel será importante para provar a convergência uniforme da série de Fourier. Os elementos da série de Fourier são funções contínuas. Se a série converge uniformemente, a função para a qual ela converge deve também ser contínua. Portanto se a função  $f$  não for contínua, a convergência da série de Fourier não pode ser uniforme. Logo devemos impor a condição adicional de que  $f$  é contínua no intervalo  $[-L, L]$ . Como  $f$  é periódica de período  $2L$ , para garantir que  $f$  é contínua em todo o domínio real é necessário impor também que  $f(L) = f(-L)$ . A derivada da função no entanto é mantida seccionalmente contínua. Logo o gráfico de  $f$  em qualquer intervalo fechado é uma curva contínua que admite no máximo um número finito de "bicos". Tanto  $f$  quanto  $f'$  satisfazem as condições do teorema de Fourier, então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right) \quad (26.197)$$

e

$$\frac{1}{2} [f'(x^+) + f'(x^-)] = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \beta_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right). \quad (26.198)$$

Estes coeficientes são dados por

$$\alpha_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) dx = \frac{1}{L} (f(L) - f(-L)) = 0, \quad (26.199)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \left(-\frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) dx \\ &= +\frac{n\pi}{L^2} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{n\pi}{L} b_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \left(\frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) dx \\ &= -\frac{n\pi}{L^2} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{n\pi}{L} a_n. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Bessel,

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f'(x))^2 dx \in \mathbb{R}, \quad (26.200)$$

portanto a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 (a_n^2 + b_n^2) \quad (26.201)$$

converge.

Sejam  $\vec{u}_n$  e  $\vec{v}_n$  elementos do  $\mathbb{R}^n$  dados por

$$\vec{u}_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right) \quad (26.202)$$

e

$$\vec{v}_n = \left(\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}, \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}, \dots, \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}\right) \quad (26.203)$$

Estes vetores possuem norma finita para qualquer valor de  $n$ , pois

$$\|\vec{u}_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) \in \mathbb{R} \quad (26.204)$$

e

$$\|\vec{v}_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \beta_k^2 < \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 \quad (26.205)$$

que converge pela desigualdade de Bessel. Seja a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (26.206)$$

A soma parcial pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 (\alpha_k^2 + \beta_k^2)} = \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} = \frac{L}{\pi} \vec{u}_n \cdot \vec{v}_n. \quad (26.207)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\frac{L}{\pi} \vec{u}_n \cdot \vec{v}_n \leq \frac{L}{\pi} \|\vec{u}_n\| \|\vec{v}_n\|, \quad (26.208)$$

que é uma quantidade limitada. Logo a soma parcial desta série é uma sequência crescente e limitada superiormente, portanto a série infinita (26.206) converge.

A série de Fourier de  $f(x)$  é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (26.209)$$

Cada termo desta série de funções é limitado.

$$\begin{aligned} \left| a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| &\leq |a_n| \left| \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| + |b_n| \left| \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \\ &\leq |a_n| + |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = M_n. \end{aligned}$$

A série dos  $M_n$  converge, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (26.210)$$

que é a série (26.206) que vimos que converge. Então pelo teste M de Weierstrass a série de Fourier converge uniformemente para  $f(x)$ .

Um passo importante nesta demonstração foi utilizar a desigualdade de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx . \quad (26.211)$$

A convergência uniforme da série de Fourier é garantida se além das condições adicionais de continuidade esta integral for um número real. Em outras palavras, a função  $f$  deve ser uma *função de quadrado integrável*. É simples verificar que a soma de duas funções de quadrado integrável é também uma função de quadrado integrável, assim como o produto de uma destas funções por um número real. Logo este conjunto de funções é um sub-conjunto do espaço de funções integráveis fechado pela soma e pela multiplicação por escalar, formando assim um espaço vetorial chamado *Espaço de Hilbert*.

## 26.4 Equação do calor

Vimos que a temperatura em uma barra de comprimento  $L$  ao longo do tempo pode ser modelada por uma função  $u(x,t)$  que deve ser solução da equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (26.212)$$

Esta função está sujeita também à condição inicial

$$u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in [0,L] \quad (26.213)$$

e às condições de contorno de Dirichlet

$$u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0 \quad (26.214)$$

ou às condições de contorno de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad (26.215)$$

formando assim um *Problema de Valor Inicial e de Contorno*.

A solução trivial  $u(x,t) = 0$  é solução da equação diferencial mas não satisfaz a condição inicial se  $f(x) \neq 0$  em algum ponto do domínio  $[0,L]$ . Pelo método de separação de variáveis, procuramos por soluções da forma  $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$  não nula. Substituindo esta função na equação diferencial parcial temos

$$X(x) \cdot T'(t) = \alpha X''(x) \cdot T(t). \quad (26.216)$$

Dividimos a equação por  $\alpha X(x) \cdot T(t)$  que supomos não nulo, resultando em

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (26.217)$$

O lado esquerdo é função apenas da variável  $t$  enquanto o lado direito é função apenas de  $x$ . Para que existam soluções separáveis cada lado da última equação deve ser igual a uma constante chamada de *constante de separação*, isto é,

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma. \quad (26.218)$$

A função  $T(t)$  admite soluções da forma

$$T(t) = C e^{\alpha \sigma t}. \quad (26.219)$$

A constante  $C$  depende da condição inicial, que no momento não é possível aplicar.

Já a função  $X(x)$  deve ser solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0. \quad (26.220)$$

As condições de contorno impõem condições sobre a função  $X(x)$ . No caso da condição de Dirichlet, temos que

$$u(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \implies X(0) \cdot T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (26.221)$$

Como esta condição deve ser válida para todo  $t \geq 0$ , a imposição  $T(t) = 0$  implica que a solução  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$  é identicamente nula. Portanto as condições de contorno de Dirichlet implicam

$$X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0, \quad (26.222)$$

enquanto as condições de contorno de Neumann implicam

$$X'(0) = 0 \quad \text{e} \quad X'(L) = 0. \quad (26.223)$$

Estas condições de contorno impõem valores para a constante de separação  $\sigma$ . Os valores permitidos são chamados de *autovalores* do problema de valor de contorno e as funções associadas a cada autovalor são chamadas de *autofunções* do problema de valor de contorno.

### 26.4.1 Condições de Dirichlet

Começamos pelo problema de valor de contorno

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0. \quad (26.224)$$

A forma específica da solução dessa equação diferencial depende do sinal da constante de separação  $\sigma$ . Se  $\sigma > 0$  escrevemos  $\sigma = +k^2$  e as soluções da equação diferencial são da forma

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}. \quad (26.225)$$

A condição de contorno  $X(0) = 0$  implica

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \implies C_2 = -C_1 \quad (26.226)$$

e

$$X(x) = 2C_1 \sinh(kx). \quad (26.227)$$

A segunda condição de contorno  $X(L) = 0$  implica

$$X(L) = 2C_1 \sinh(kL) = 0. \quad (26.228)$$

A função seno hiperbólico se anula apenas se o argumento é nulo. No entanto supomos  $k$  positivo e se  $L = 0$  não temos barra para modelar. Então a condição de contorno implica  $C_1 = 0$ . Como neste caso  $C_1 = C_2 = 0$ , a solução encontrada é identicamente nula, que viola a hipótese de que a solução  $u(x, t)$  é não nula. Portanto não existem autovalores positivos deste problema de valor de contorno.

Se  $\sigma = 0$  a solução da equação diferencial é dada por

$$X(x) = C_1 x + C_2. \quad (26.229)$$

A condição  $X(0) = 0$  implica  $C_2 = 0$  e  $X(x) = C_1 x$ . Impondo  $X(L) = 0$  temos  $C_1 L = 0$  e como queremos que a barra tenha comprimento positivo temos que  $C_1 = 0$  e a solução  $X(x)$  é identicamente nula. Logo não existe autovalor nulo do problema de valor de contorno.

Finalmente se  $\sigma < 0$  escrevemos  $\sigma = -k^2$  e as soluções da equação diferencial são escritas como

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx). \quad (26.230)$$

Impondo  $X(0) = 0$  temos

$$X(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \implies C_1 = 0. \quad (26.231)$$

A solução então deve ser

$$X(x) = C_2 \sin(kx). \quad (26.232)$$

Impondo  $X(L) = 0$  temos

$$X(L) = C_2 \sin(kL) = 0. \quad (26.233)$$

Se  $C_2 = 0$  esgotamos a possibilidade de soluções do problema de valor de contorno. No entanto podemos encontrar soluções com  $C_2 \neq 0$  se  $\sin(kL) = 0$ , o que ocorre em múltiplos de  $\pi$ , isto é,

$$kL = n\pi \implies k = \frac{n\pi}{L}. \quad (26.234)$$

Os autovalores deste problema de valor de contorno são

$$\sigma_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (26.235)$$

com autofunções

$$X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.236)$$

Os valores de  $n$  são positivos, pois os termos negativos e nulo resultam em soluções que não são linearmente independentes das autofunções encontradas com  $n > 0$ .

A solução de  $T(t)$  associada ao autovalor  $\sigma_n$  é

$$T_n(t) = e^{\alpha\sigma_n t} = e^{-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \quad (26.237)$$

e a solução da equação diferencial parcial correspondente a este autovalor é

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.238)$$

Pelo princípio de superposição qualquer combinação linear destas soluções é uma solução da mesma equação diferencial parcial, portanto a solução geral é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.239)$$

Aplicando a condição inicial  $u(x,0) = f(x)$  encontramos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \forall x \in [0, L]. \quad (26.240)$$

Para determinar os valores de  $c_n$  precisamos calcular a série de Fourier da condição inicial  $f(x)$ . No entanto a condição inicial está definida apenas no intervalo  $[0, L]$ , mas precisamos que a função esteja definida no intervalo  $[-L, L]$  e que seja periódica de período  $2L$ . Este problema é resolvido fazendo uma extensão de  $f(x)$ . Podemos definir uma nova função  $F(x)$  escolhendo uma expressão qualquer  $g(x)$  para o intervalo  $(-L, 0)$  e definindo-a como periódica de período  $2L$ , como mostra a figura 26.4.

Não importa como definimos esta extensão de  $f(x)$ , podemos calcular a série de Fourier de  $F(x)$  e esta série de Fourier converge para a condição inicial  $f(x)$  no intervalo  $(0, L)$ . Na fronteira sabemos que a série de Fourier converge para os limites laterais, mas o valor da solução já está fixado nestes pontos pelas condições de contorno.

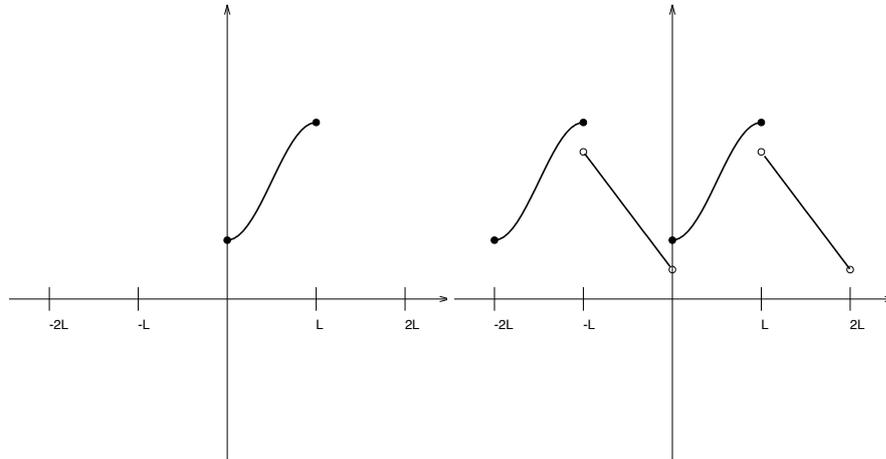


Figura 26.4: Extensão arbitrária no intervalo  $(-L, 0)$  e periódica de período  $2L$ .

Analisando com mais cuidado a equação (26.240) podemos ver que a série de Fourier que devemos expandir contém apenas funções senos, então devemos escolher uma extensão de  $f(x)$  no intervalo  $(-L, 0)$  tal que a série de Fourier resultante contenha apenas funções senos, isto é, com coeficientes

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (26.241)$$

todos nulos. Como a função cosseno é par, se  $F$  é uma função ímpar a integral acima é automaticamente nula. Então para modelar adequadamente a solução da equação do calor devemos estender a condição inicial de modo que  $F(x)$  seja ímpar, o que chamamos de *extensão ímpar*, como mostrado na figura 26.5.

Neste caso os coeficientes  $b_n$  são calculados como

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (26.242)$$

Como definimos  $F$  como uma função ímpar, os coeficientes  $b_n$  são calculados como a integral de uma função par em um intervalo simétrico, o que nos permite escrever

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (26.243)$$

Com estes valores de  $b_n$  calculamos a solução do problema da condução do calor sujeito à condição inicial  $f(x)$  e condições de contorno de Dirichlet.

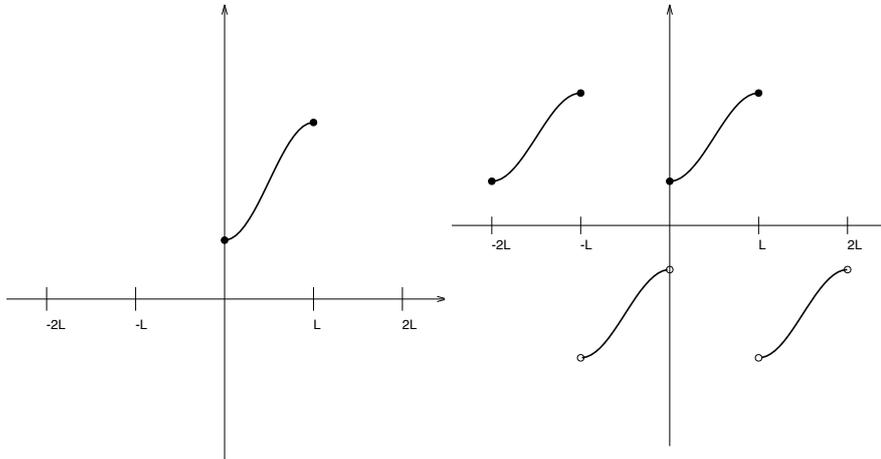


Figura 26.5: Extensão ímpar da função original.

**Exemplo 26.6.**

Uma barra de comprimento  $L$  com a temperatura fixa nas pontas possui uma temperatura  $u(x, t)$  que satisfaz o problema de valor inicial e de contorno definido pela equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (26.244)$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = Ax(L - x) \quad \forall x \in [0, L] \quad (26.245)$$

e condições de contorno de Dirichlet

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (26.246)$$

Como visto a solução geral é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (26.247)$$

com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L Ax(L - x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{4AL^2}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n). \quad (26.248)$$

Se  $n$  é um número par,  $b_n$  é nulo. Já nos casos dos números ímpares temos

$$b_{2n-1} = \frac{8AL^2}{\pi^3} \frac{1}{(2n-1)^3}. \quad (26.249)$$

A solução deste problema de valor inicial e de contorno é

$$u(x,t) = \frac{8AL^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} e^{-\alpha \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left( (2n-1) \frac{\pi x}{L} \right). \quad (26.250)$$

Uma aplicação simples do teste M de Weierstrass mostra que esta solução converge uniformemente.

### 26.4.2 Condições de Neumann

Agora resolvemos o problema da condução do calor com condições de contorno de Neumann. O método de separação de variáveis nos diz que a solução  $u(x,t)$  da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (26.251)$$

pode ser escrita como  $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ . A função  $T(t)$  é solução da equação diferencial ordinária

$$T'(t) - \alpha \sigma T(t) = 0, \quad (26.252)$$

ou seja,

$$T(t) = C e^{\alpha \sigma t} \quad (26.253)$$

e a função  $X(x)$  é solução da equação diferencial

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0 \quad (26.254)$$

sujeita à condição de contorno

$$X'(0) = 0 \quad \text{e} \quad X'(L) = 0. \quad (26.255)$$

Se  $\sigma > 0$  escrevemos  $\sigma = +k^2$  a solução da equação diferencial e sua derivada são dadas por

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}, \quad (26.256)$$

$$X'(x) = C_1 k e^{kx} - C_2 k e^{-kx}. \quad (26.257)$$

A condição de contorno  $X'(0) = 0$  implica  $k(C_1 - C_2) = 0$ . Estamos considerando  $k \neq 0$ , portanto  $C_1 = C_2$ . A solução é dada então por  $X(x) = 2C_1 \cosh(kx)$  com derivada  $X'(x) = 2kC_1 \sinh(kx)$ . A segunda condição  $X'(L) = 0$  implica  $2kC_1 \sinh(kL) = 0$ . Novamente  $k$  não pode ser zero senão a solução não teria

esta forma e  $L$  deve ser maior que zero para termos uma barra para modelar. Então  $C_1 = 0$  e a solução é identicamente nula, que também excluimos ao aplicar o método. Logo não existem soluções do problema de valor inicial com autovalores positivos.

Se  $\sigma = 0$  a solução da equação diferencial ordinária se sua derivada são dadas por

$$X(x) = C_1x + C_2, \quad (26.258)$$

$$X'(x) = C_1. \quad (26.259)$$

Neste caso tanto a condição de contorno  $X(0) = 0$  quanto  $X(L) = 0$  implicam  $C_1 = 0$  sem fazer nenhuma imposição à constante  $C_2$ . Então este problema de valor de contorno admite um autovalor  $\sigma_0 = 0$  com autofunção

$$X_0(x) = \frac{1}{2}, \quad (26.260)$$

onde este valor foi escolhido por conveniência.

Se  $\sigma < 0$  escrevemos  $\sigma = -k^2$  e a solução é tal que

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx), \quad (26.261)$$

$$X'(x) = -C_1k \sin(kx) + C_2k \cos(kx). \quad (26.262)$$

$$(26.263)$$

A primeira condição de contorno  $X'(0) = 0$  implica  $C_2 = 0$ , ou seja,

$$X(x) = C_1 \cos(kx), \quad (26.264)$$

$$X'(x) = -C_1k \sin(kx). \quad (26.265)$$

$$(26.266)$$

A segunda condição de contorno  $X'(L) = 0$  implica  $-C_1k \sin(kL) = 0$ . Para que existam soluções com autovalores negativos é necessário que  $kL = n\pi$ , ou seja, o problema de valor de contorno possui autovalores negativos dados por

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad (26.267)$$

com autofunções

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.268)$$

Para cada autovalor há uma solução  $T_n(t)$  correspondente

$$T_0(t) = e^{-\alpha \cdot 0 \cdot t} = 1, \quad (26.269)$$

$$T_n(t) = e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t}. \quad (26.270)$$

e uma solução  $u_n(x, t)$  correspondente

$$u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t) = \frac{1}{2}, \quad (26.271)$$

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.272)$$

Pelo princípio de superposição, escrevemos a solução geral da equação do calor como

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.273)$$

A condição inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L] \quad (26.274)$$

implica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.275)$$

Novamente devemos estender a função  $f(x)$  de alguma maneira para o intervalo  $(-L, 0)$  para calcular a série de Fourier. Esta extensão deve ser tal que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (26.276)$$

o que é satisfeito se fizermos a *extensão par*, como exibido na figura 26.6.

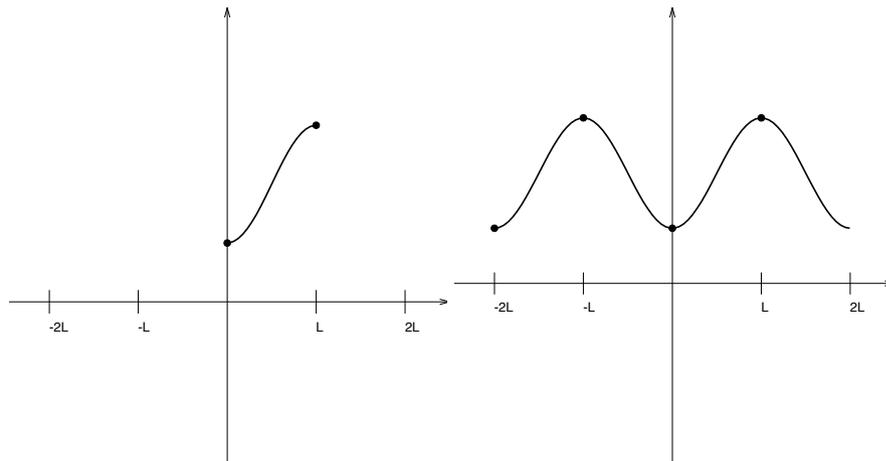


Figura 26.6: Extensão par da função original.

Para construir esta extensão definimos uma função

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ f(-x) & \text{se } x \in (-L, 0) \end{cases} \quad (26.277)$$

e periódica de período  $2L$  fora do intervalo  $(-L, L]$ . Neste caso os coeficientes não nulos são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (26.278)$$

**Exemplo 26.7.**

Uma barra de comprimento  $L$  com a temperatura fixa nas pontas possui uma temperatura  $u(x, t)$  que satisfaz o problema de valor inicial e de contorno definido pela equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (26.279)$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = Ax(L - x) \quad \forall x \in [0, L] \quad (26.280)$$

e condições de contorno de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (26.281)$$

Como visto a solução geral é dada por

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.282)$$

com

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L Ax(L - x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2AL^2}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) \quad (26.283)$$

e  $a_0 = \frac{AL^2}{3}$ , A solução deste problema de valor inicial e de contorno é

$$u(x, t) = \frac{AL^2}{6} - \frac{2AL^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.284)$$

Uma aplicação simples do teste M de Weierstrass mostra que esta solução converge uniformemente.

## 26.5 Equação de onda

Seja uma corda esticada por uma tensão  $T$  de comprimento  $L$  com uma densidade linear  $\rho$ . Um pequeno deslocamento vesticl de propaga ao longo da corda como uma onda. Podemos orientar a corda ao longo do eixo  $x$  e o deslocamento vertical no eixo  $y$ , que será uma função da posição  $x$  e do tempo  $t$ , isto é,

$$y = u(x, t), \quad (26.285)$$

onde  $x \in [0, L]$  e  $t > 0$ .

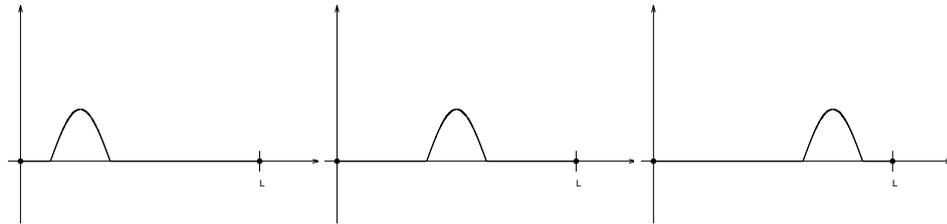


Figura 26.7: Propagação de uma onda em uma corda de comprimento  $L$ .

Neste movimento as partículas da corda se movimentam para cima e para baixo apenas, apesar da onda se propagar para a direita. Seja uma região da corda entre os pontos  $x_0$  e  $x_0 + \Delta x$ . A massa desse trecho de corda é dada por

$$m = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \rho(x) dx. \quad (26.286)$$

A componente vertical do centro de massa deste trecho é

$$y_{CM} = \frac{1}{m} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \rho(x) u(x, t) dx. \quad (26.287)$$

A velocidade do centro de massa é

$$\dot{y}_{CM} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{m} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \rho(x) u(x, t) dx \right] = \frac{1}{m} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (26.288)$$

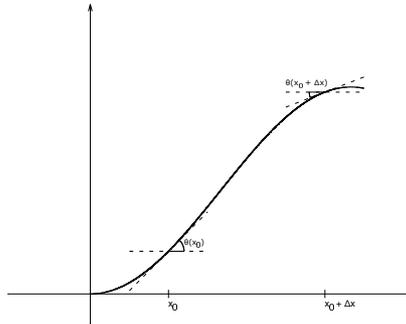
se a função  $u(x, t)$  for diferenciável neste intervalo. A aceleração do centro de massa é

$$\ddot{y}_{CM} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{m} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx \right] = \frac{1}{m} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \quad (26.289)$$

Pela segunda lei de Newton,

$$m\ddot{y}_{CM}(t) = T_v(t) , \quad (26.290)$$

sendo  $T_v(t)$  a componente vertical da tensão na corda, convencionando que uma tensão positiva puxa a corda para a direita ou para cima.



Seja  $\theta(x, t)$  o ângulo de inclinação da reta tangente à corda no ponto  $x$  e no instante  $t$ . Seja  $T(x, t)$  a tensão da corda no ponto  $x$  e no instante  $t$ . As componentes horizontais destas tensões nos pontos  $x_0$  e  $x_0 + \Delta x$  devem ser iguais para que não haja movimento horizontal da corda, ou seja,

$$T(x_0, t) \cos(\theta(x_0, t)) = T(x_0 + \Delta x, t) \cos(\theta(x_0 + \Delta x, t)) = T_h(t) \quad (26.291)$$

A diferença entre as tensões verticais é

$$T(x_0 + \Delta x, t) \sin(\theta(x_0 + \Delta x, t)) - T(x_0, t) \sin(\theta(x_0, t)) = m\ddot{y}_{CM}(t) . \quad (26.292)$$

Queremos dividir cada termo desta última equação por  $T_h(t)$ . Podemos escolher a expressão mais conveniente em cada termo, resultando em

$$\frac{T(x_0 + \Delta x, t) \sin(\theta(x_0 + \Delta x, t))}{T(x_0 + \Delta x, t) \cos(\theta(x_0 + \Delta x, t))} - \frac{T(x_0, t) \sin(\theta(x_0, t))}{T(x_0, t) \cos(\theta(x_0, t))} = \frac{m}{T_h(t)} \ddot{y}_{CM}(t) \quad (26.293)$$

ou de maneira mais simples

$$\tan(\theta(x_0 + \Delta x, t)) - \tan(\theta(x_0, t)) = \frac{m}{T_h(t)} \ddot{y}_{CM}(t) \quad (26.294)$$

ou ainda

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = \frac{1}{T_h(t)} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx . \quad (26.295)$$

Pelo teorema fundamental do cálculo escrevemos esta última equação como

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{1}{T_h(t)} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx , \quad (26.296)$$

que agrupamos em uma única integral

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho(x)}{T_h(t)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx = 0 \quad (26.297)$$

A quantidade  $\frac{\rho(x)}{T_h(t)}$  determina a velocidade de propagação da onda na corda e podemos escrevê-la como  $\frac{1}{v^2}$ . Esta integral deve ser nula em todos os trechos da corda, isto é, para qualquer valor de  $x_0 \in [0, L]$  e qualquer comprimento de trecho  $\Delta x$  para todo instante  $t \geq 0$ . Portanto a expressão entre colchetes dentro da integral deve ser nulo em todos os pontos da corda e em todo  $t \geq 0$ , isto é,

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (26.298)$$

para todo  $x \in [0, L]$  e todo  $t \geq 0$ . Esta equação é chamada de *equação de onda unidimensional*. No caso de uma propagação de onda em um número maior de dimensões a equação de onda é dada por

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u . \quad (26.299)$$

Esta equação é uma equação diferencial parcial linear homogênea de segunda ordem. Se a tensão na corda e a densidade forem constantes, esta equação é também de coeficientes constantes.

### 26.5.1 Problema de valor inicial e de contorno

Se as pontas das cordas estão presas, como numa harpa ou violão, impomos à função  $u(x, t)$  condições de contorno de Dirichlet. Podemos orientar o nosso sistema de coordenadas de modo que as alturas nas quais as pontas estão presas sejam nulas, isto é, temos as condições de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L, t) = 0 . \quad (26.300)$$

Outra possibilidade é prender a corda em uma argola e permitir que a argola suba e desça presa a uma barra. A altura da corda é variável, mas a tensão da corda faz com que a inclinação da corda seja nula na ponta, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 , \quad (26.301)$$

também conhecidas como condições de Neumann.

Assim como no caso da equação do calor, procuramos por uma solução geral que satisfaça uma destas condições de contorno e depois impomos condições iniciais. Pelo método de separação de variáveis escrevemos

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) . \quad (26.302)$$

Substituindo na equação de onda temos

$$\frac{1}{v^2} T''(t) \cdot X(x) = X''(x) \cdot T(t) . \quad (26.303)$$

Como procuramos por uma solução não trivial, supomos que  $u(x, t)$  não seja identicamente nula, o que nos permite dividir a equação anterior por  $X(x) \cdot T(t)$  e obter

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} . \quad (26.304)$$

Como o lado esquerdo é uma função apenas de  $t$  enquanto o lado direito é função apenas de  $x$ , cada lado deve ser igual a uma constante  $\sigma$  que chamamos de constante de separação, resultando em duas equações diferenciais ordinárias, uma para a função  $T(t)$  e outra para  $X(x)$ , dadas por

$$T''(t) - \sigma v^2 T(t) = 0 , \quad (26.305)$$

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0 . \quad (26.306)$$

As soluções das duas equações diferenciais dependem do sinal da constante de separação  $\sigma$ , cujos valores permitidos são determinados pelas condições de contorno.

Começando pelas condições de Dirichlet, se  $\sigma > 0$  escrevemos  $\sigma = +k^2$  e encontramos as soluções

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} . \quad (26.307)$$

A condição de Dirichlet  $X(0) = 0$  implica  $C_1 + C_2 = 0$  e  $X(x) = 2C_1 \sinh(kx)$ . A próxima condição  $X(L) = 0$  implica  $2C_1 \sinh(kL) = 0$ , que só é satisfeita com  $C_1 = 0$ , portanto a única solução possível com  $\sigma > 0$  é a solução identicamente nula que excluímos ao dividir a equação diferencial pela solução ao aplicar o método. Portanto não existem soluções deste problema de valor de contorno com autovalor positivo.

Procuramos agora soluções com  $\sigma = 0$ , que são dadas por

$$X(x) = C_1 x + C_2 . \quad (26.308)$$

A condição  $X(0) = 0$  implica  $C_2 = 0$  e  $X(x) = C_1 x$ . Impondo  $X(L) = 0$  temos  $C_1 L = 0$  que implica  $C_1 = 0$  e novamente encontramos apenas a solução identicamente nula e não existem soluções do problema de valor de contorno com autovalor nulo.

Procurando por soluções com  $\sigma < 0$  escrevemos  $\sigma = -k^2$  e as soluções para  $X(x)$  são dadas por

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) . \quad (26.309)$$

A condição de contorno  $X(0) = 0$  implica  $C_1 = 0$  e  $X(x) = C_2 \operatorname{sen}(kx)$ . Impondo  $X(L) = 0$  temos  $C_2 \operatorname{sen}(kL) = 0$ . Para que existam soluções com  $C_2 \neq 0$  é necessário que  $\operatorname{sen}(kL) = 0$ , ou seja,  $kL = n\pi$ . Então existem autovalores negativos do problema de valor de contorno dados por

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad (26.310)$$

com autofunções dadas por

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.311)$$

Antes de partir para a função  $T(t)$  resolvemos novamente o problema de valor de contorno agora com condições de contorno de Neumann  $X'(0) = 0$  e  $X'(L) = 0$ . Se  $\sigma > 0$  escrevemos  $\sigma = +k^2$  e

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}, \quad (26.312)$$

com derivada

$$X'(x) = C_1 k e^{kx} - C_2 k e^{-kx}. \quad (26.313)$$

A condição  $x'(0) = 0$  implica  $k(C_1 - C_2) = 0$ . Como  $k \neq 0$  então  $C_1 = C_2$  e  $X(x) = 2C_1 \cosh(kx)$ . A condição  $X'(L) = 0$  implica  $2C_1 k \operatorname{senh}(kL) = 0$ . Como  $k \neq 0$  e  $L \neq 0$ , temos apenas  $C_1 = 0$  e  $X(x) = 0$ , que excluimos por hipótese. Então não existem autovalores positivos do problema de valor de contorno com condições de Neumann.

Se  $\sigma = 0$  temos

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{e} \quad X'(x) = C_1. \quad (26.314)$$

As condições  $X'(0) = 0$  e  $X'(L) = 0$  implicam apenas  $C_1 = 0$ , permitindo que  $C_2$  tenha qualquer valor real não nulo. Então existe uma solução do problema de valor de contorno com autovalor nulo que por conveniência escrevemos como

$$X_0(x) = \frac{1}{2}. \quad (26.315)$$

Se  $\sigma < 0$  definimos  $\sigma = -k^2$  e as soluções da equação diferencial ordinária são dadas por

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \operatorname{sen}(kx) \quad (26.316)$$

com derivada

$$X'(x) = -C_1 k \operatorname{sen}(kx) + C_2 k \cos(kx). \quad (26.317)$$

Agora a condição de contorno  $X'(0) = 0$  implica  $C_2 = 0$  e a condição  $X'(L) = 0$  implica  $-C_1 k \text{sen}(kL) = 0$ , que admite  $C_1 \neq 0$  somente se  $kL = n\pi$ . Portanto existem autovalores negativos do problema de valor de contorno dados por

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad (26.318)$$

com autofunções

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.319)$$

Tanto nas condições de Dirichlet quanto nas condições de Neumann os autovalores negativos são dados por  $\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$  e a equação diferencial ordinária para  $T(t)$  é

$$T_n''(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}v^2T_n(t) = 0 \quad (26.320)$$

cuja solução é escrita como

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right). \quad (26.321)$$

No caso de autovalor nulo a solução para  $T(t)$  correspondente é

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t. \quad (26.322)$$

No caso de condições de contorno de Dirichlet as soluções da equação de onda são

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.323)$$

Estas funções são chamadas de *modos normais de vibração*.

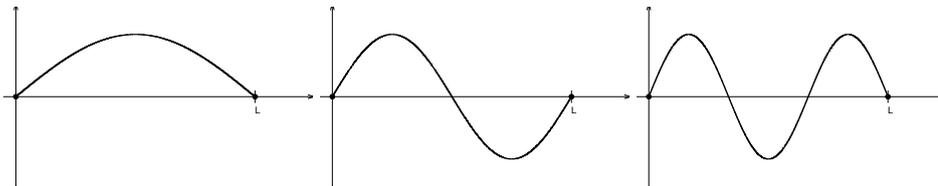


Figura 26.8: Primeiros modos normais de vibração de uma corda.

Pelo princípio de superposição a solução geral é a soma de todos os infinitos modos normais de vibração,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.324)$$

Como a equação de onda é de segunda ordem no tempo precisamos de duas condições iniciais para determinar as constantes  $A_n$  e  $B_n$ . A posição inicial da corda é

$$u(x,0) = f(x) \quad (26.325)$$

e a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad (26.326)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções definidas no intervalo  $[0,L]$ . Substituindo  $t = 0$  na solução geral encontramos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26.327)$$

e determinamos os coeficientes  $A_n$  pela série de Fourier da extensão ímpar de  $f(x)$ , ou seja,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (26.328)$$

Derivando a solução geral  $u(x,t)$  e calculando em  $t = 0$  temos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi v}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26.329)$$

e determinamos  $B_n$  pela série de Fourier da extensão ímpar de  $g(x)$ , ou seja,

$$B_n \frac{n\pi v}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (26.330)$$

ou

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (26.331)$$

Assim a solução da equação de onda com condições de Dirichlet está completamente resolvida.

No caso de condições de Neumann os modos normais de vibração são

$$u_n(x,t) = \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26.332)$$

e a solução referente ao autovalor nulo

$$u_0(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} \quad (26.333)$$

descreve um movimento médio devido ao fato das argolas onde as pontas estão presas poderem subir ou descer.

A solução geral neste caso é dada por

$$u(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (26.334)$$

Aplicando a condição inicial  $u(x,0) = f(x)$  temos

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26.335)$$

e calculamos os coeficientes  $A_n$  pela série de Fourier da extensão par de  $f(x)$ , ou seja,

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx. \quad (26.336)$$

e

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (26.337)$$

se  $n > 0$ .

Derivando a solução geral em relação ao tempo e calculando em  $t = 0$  temos

$$g(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi v}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26.338)$$

e os coeficiente  $B_n$  são calculados pela série de Fourier da extensão par de  $g(x)$ , isto é,

$$B_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) dx. \quad (26.339)$$

e

$$B_n \frac{n\pi v}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad (26.340)$$

se  $n > 0$ , que escrevemos como

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (26.341)$$

Calculando estes coeficientes determinamos a solução da equação de onda com condições de Neumann.

**Exemplo 26.8** (Corda dedilhada).

Uma corda de harpa (ou violão) tem as pontas fixas. Se puxarmos a corda a uma altura  $h$  na posição  $x = a$  e soltarmos com uma velocidade inicial nula temos condições iniciais

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{a}, & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ \frac{h(x-L)}{(a-L)}, & \text{se } a \leq x \leq L \end{cases} \quad (26.342)$$

e  $g(x) = 0$ .Como  $g(x) = 0$  temos trivialmente  $B_n = 0$  e a solução geral é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left( \frac{n\pi vt}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (26.343)$$

Os coeficientes  $A_n$  são dados por

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad (26.344)$$

que devemos dividir em dois intervalos para calcular.

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^a \frac{hx}{a} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx + \frac{2}{L} \int_a^L \frac{h(x-L)}{(a-L)} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (26.345)$$

Integrando por partes temos

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \frac{hx}{a} \left( -\frac{L}{n\pi} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_0^a - \frac{2}{L} \int_0^a \frac{h}{a} \left( -\frac{L}{n\pi} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &+ \frac{2}{L} \frac{h(x-L)}{(a-L)} \left( -\frac{L}{n\pi} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_a^L - \frac{2}{L} \int_a^L \frac{h}{(a-L)} \left( -\frac{L}{n\pi} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

Estas últimas integrais são simples.

$$A_n = -\frac{2h}{an\pi}x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^a + \frac{2hL}{an^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^a \\ - \frac{2h}{(a-L)n\pi}(x-L) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_a^L + \frac{2hL}{(a-L)n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_a^L.$$

Metade destas substituições são nulas. Os termos não nulos são

$$A_n = -\frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{2hL}{an^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \\ + \frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{2hL}{(a-L)n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right).$$

Convenientemente os cossenos se cancelam. Os termos restantes são

$$A_n = \frac{2hL}{n^2\pi^2} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{a-L} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = \frac{2hL}{n^2\pi^2} \left[ \frac{a-L-a}{a(a-L)} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \quad (26.346)$$

e finalmente chegamos no resultado

$$A_n = -\frac{2hL^2}{n^2\pi^2} \frac{1}{a(a-L)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right). \quad (26.347)$$

A solução da equação de onda é finalmente

$$u(x,t) = -\frac{2hL^2}{\pi^2 a(a-L)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right). \quad (26.348)$$

Pelo teste M de Weierstrass é simples verificar que esta série converge uniformemente. Os modos normais de vibração descrevem o som gerado pela corda. Esta solução ignora a resistência do ar. Considerando a resistência do ar podemos verificar que os modos são amortecidos e quanto maior o valor de  $n$  mais rápido o modo decai. O último modo a decair é o modo fundamental com  $n = 1$ . Escrevendo a dependência temporal como  $\cos(\omega t)$  calculamos a frequência do modo fundamental como

$$\omega = \frac{\pi v}{L} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (26.349)$$

Este resultado é interessante porque mostra que a frequência do som não depende da posição em que puxamos a corda e nem a que altura. Depende apenas do comprimento da corda, da densidade e da tensão.

## 26.6 Problema de Cauchy

Imagine uma corda com comprimento tão grande que não podemos ver as pontas e que idealizamos como uma corda de comprimento infinito. Neste caso não podemos determinar condições de contorno e portanto não podemos definir um problema de valor de contorno. Devemos encontrar uma solução para a equação de onda

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (26.350)$$

com  $x \in (-\infty, +\infty)$  e  $t \geq 0$  satisfazendo as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (26.351)$$

para todo  $x$  real. Este problema é conhecido como *Problema de Cauchy* e possui uma solução geral dada pela *fórmula de d'Alembert*.

### Teorema 26.5.

Se  $u(x, t)$  é solução da equação de onda

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (26.352)$$

com  $v$  constante, então existem funções reais  $F$  e  $G$  de uma única variável tais que

$$u(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt). \quad (26.353)$$

*Demonstração.* Sejam as variáveis  $\xi = x + vt$  e  $\eta = x - vt$ . Pela regra da cadeia

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (26.354)$$

A segunda derivada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (26.355)$$

A derivada no tempo é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (26.356)$$

e a segunda derivada é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = v \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \\ &= v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} v + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} (-v) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} v - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} (-v) \right) \\ &= v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (26.357)$$

Nestas coordenadas escrevemos o lado esquerdo da equação de onda como

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \quad (26.358)$$

ou apenas

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \quad (26.359)$$

Então a equação de onda implica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (26.360)$$

Podemos escrever esta equação como

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(\eta), \quad (26.361)$$

onde  $g$  é uma função de uma única variável. Seja  $G$  alguma primitiva de  $g$ , podemos escrever a função  $u$  como

$$u(\xi, \eta) = G(\eta) + F(\xi), \quad (26.362)$$

onde  $F$  é uma “constante” em relação à variável  $\eta$ , isto é, só depende de  $\xi$ . Voltando às variáveis  $x$  e  $t$  temos

$$u(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt). \quad (26.363)$$

□

Nesta demonstração as funções  $F$  e  $G$  devem apenas ser duas vezes diferenciáveis, mas fora esta condição não foi imposta uma expressão específica. A expressão para estas funções é determinada pelas condições iniciais. A condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  implica

$$F(x) + G(x) = f(x) . \quad (26.364)$$

Para aplicar a condição inicial  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$  calculamos a derivada de  $u(x, t)$  pela regra da cadeia

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = vF'(x + vt) - vG'(x - vt) \quad (26.365)$$

e a condição inicial implica

$$vF'(x) - vG'(x) = g(x) \quad (26.366)$$

ou

$$F'(x) - G'(x) = \frac{1}{v}g(x) , \quad (26.367)$$

Integrando esta expressão temos

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{v} \int_0^x g(s) ds + C , \quad (26.368)$$

onde  $C$  é uma constante de integração arbitrária. Somando as equações (26.366) e (26.368) temos

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2v} \int_0^x g(s) ds + \frac{C}{2} \quad (26.369)$$

e subtraindo as equações temos

$$G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2v} \int_0^x g(s) ds - \frac{C}{2} \quad (26.370)$$

Agora escrevemos a solução da equação de onda  $u(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt)$  como

$$u(x, t) = \frac{f(x + vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_0^{x+vt} g(s) ds + \frac{C}{2} + \frac{f(x - vt)}{2} - \frac{1}{2v} \int_0^{x-vt} g(s) ds - \frac{C}{2} \quad (26.371)$$

que simplificamos como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds . \quad (26.372)$$

**Exemplo 26.9** (Corda dedilhada).

Imagine uma corda infinita esticada com uma deformação inicial descrita por uma função  $u(x, 0) = f(x)$  e solta com uma velocidade inicial  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ . Neste caso a solução de d'Alembert é escrita como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) . \quad (26.373)$$

Se a condição inicial é

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(\alpha x) , & \text{se } -\frac{\pi}{\alpha} \leq x \leq \frac{\pi}{\alpha} \\ 0 , & \text{se } x < -\frac{\pi}{\alpha} \text{ ou } x > \frac{\pi}{\alpha} \end{cases} \quad (26.374)$$

como mostra a figura 26.9.

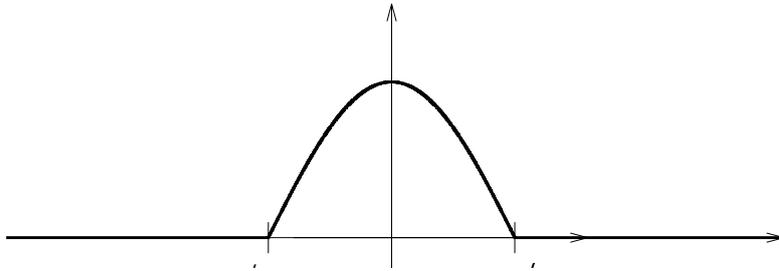


Figura 26.9: Condição inicial da solução de d'Alembert.

A solução de d'Alembert é a soma de duas funções

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x - vt) + \frac{1}{2} f(x + vt) \quad (26.375)$$

onde

$$f(x - vt) = \begin{cases} \text{sen}(\alpha x - \alpha vt) , & \text{se } -\frac{\pi}{\alpha} \leq x - vt \leq \frac{\pi}{\alpha} \\ 0 , & \text{se } x - vt < -\frac{\pi}{\alpha} \text{ ou } x - vt > \frac{\pi}{\alpha} \end{cases} \quad (26.376)$$

O intervalo em que esta função é diferente de zero pode ser escrito como  $-\frac{\pi}{\alpha} + vt < x < \frac{\pi}{\alpha} + vt$ . Este intervalo se desloca para a direita com uma velocidade  $v$ . Já no caso da função  $f(x + vt)$  o intervalo no qual ela é não nula é  $-\frac{\pi}{\alpha} - vt < x < \frac{\pi}{\alpha} - vt$ .

Esta solução é a soma de dois pulsos que são transmitidos um para a direita e outro para a esquerda, com velocidade  $v$ . No instante inicial  $t = 0$  ocorre uma interferência construtiva resultando na condição inicial. Para  $t > 0$ , o comportamento da solução de d'Alembert é ilustrado na figura 26.10.

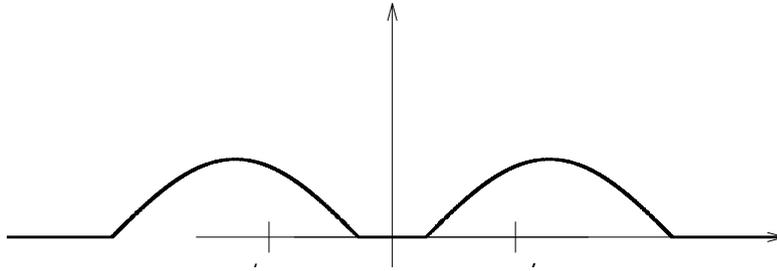


Figura 26.10: Comportamento da solução de d'Alembert.

**Exemplo 26.10** (Corda percutida).

Agora a corda infinita está inicialmente sem deformações, isto é, com posição inicial  $u(x, 0) = 0$ , mas um martelo ao bater na corda transfere momento, implicando uma velocidade inicial  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ . Neste caso a solução de d'Alembert é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds. \quad (26.377)$$

Se

$$g(x) = \begin{cases} \text{sen}(\alpha x), & \text{se } -\frac{\pi}{\alpha} \leq x \leq \frac{\pi}{\alpha} \\ 0, & \text{se } x < -\frac{\pi}{\alpha} \text{ ou } x > \frac{\pi}{\alpha} \end{cases} \quad (26.378)$$

como no exemplo anterior, a solução torna-se

$$u(x, t) = \frac{1}{2v} H(x+vt) - \frac{1}{2v} H(x-vt) \quad (26.379)$$

onde

$$H(x-vt) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x - \alpha vt), & \text{se } -\frac{\pi}{\alpha} \leq x-vt \leq \frac{\pi}{\alpha} \\ 0, & \text{se } x-vt < -\frac{\pi}{\alpha} \text{ ou } x-vt > \frac{\pi}{\alpha} \end{cases} \quad (26.380)$$

Assim como no exemplo da corda dedilhada, o intervalo em que  $H(x-vt)$  é diferente de zero é  $-\frac{\pi}{\alpha} + vt < x < \frac{\pi}{\alpha} + vt$ , ou seja, se desloca para a direita com velocidade  $v$ , enquanto o intervalo no qual a função  $H(x+vt)$  é diferente de zero se desloca para a esquerda também com velocidade  $v$ . Neste caso o sinal destas ondas é oposto, e no instante  $t = 0$  ocorre uma interferência destrutiva tornando a posição inicial nula.

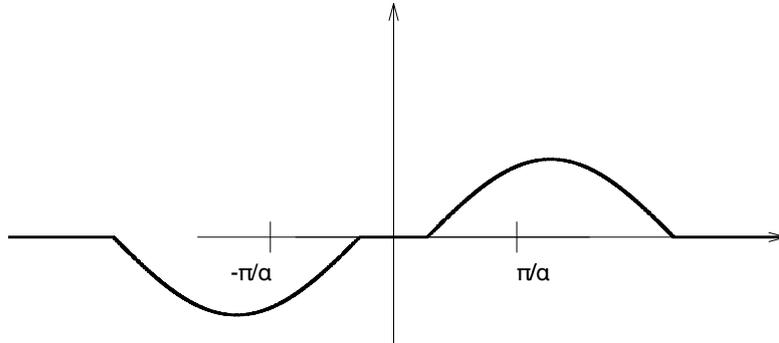


Figura 26.11: Comportamento da solução de d'Alembert.

### 26.6.1 Integral da energia

Dizemos que as condições iniciais  $u(x, 0) = f(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$  possuem suporte compacto se as integrais impróprias de  $-\infty$  a  $+\infty$  convergem. Em particular, se as funções  $f$  e  $g$  se anulam fora de um intervalo fechado  $[a, b]$  e são seccionalmente contínuas dentro dele, as condições iniciais possuem suporte compacto.

Se multiplicarmos a equação de onda por  $\frac{\partial u}{\partial t}$  temos

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (26.381)$$

O primeiro termo pode ser escrito como

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2. \quad (26.382)$$

Queremos escrever o segundo termo de maneira parecida. Pela regra de Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (26.383)$$

Então segundo termo da equação (26.381) é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (26.384)$$

que também podemos escrever como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (26.385)$$

Assim escrevemos a equação (26.381) como

$$\frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (26.386)$$

Logo a equação de onda implica

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2v^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (26.387)$$

Integrando sobre todos os valores possíveis de  $x$  temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2v^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \quad (26.388)$$

Como o domínio de integração não varia com o tempo, escrevemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2v^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}. \quad (26.389)$$

Se as condições iniciais possuem suporte compacto, então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (26.390)$$

portanto o lado direito da equação (26.390) é nulo. Então

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2v^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0. \quad (26.391)$$

Esta integral é então uma grandeza que se conserva chamada *integral da energia* e denotada por  $E$ . Como ela possui o mesmo valor em qualquer  $t \geq 0$ , substituindo  $t = 0$  temos

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2v^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \right)^2 \right] dx \quad (26.392)$$

que de acordo com as condições iniciais calculamos como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2v^2} (g(x))^2 + \frac{1}{2} (f'(x))^2 \right] dx. \quad (26.393)$$

Como  $f$  e  $g$  são funções com suporte compacto,  $E$  é um número real finito, garantindo a conservação de energia da onda.

A integral da energia garante também a unicidade da solução do problema de Cauchy

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (26.394)$$

com condições iniciais de suporte compacto. Sejam  $u_1$  e  $u_2$  soluções do problema de Cauchy. Pelo princípio de superposição a diferença  $\bar{u}(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  é também solução da equação de onda, mas com condições iniciais

$$\bar{u}(x, 0) = u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f(x) - f(x) = 0 \quad (26.395)$$

e

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = g(x) - g(x) = 0. \quad (26.396)$$

Pela integral da energia

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2v^2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, 0) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x, 0) \right)^2 \right] dx = 0 \quad (26.397)$$

Então para qualquer  $t \geq 0$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2v^2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right] dx = 0 \quad (26.398)$$

As expressões dentro desta última integral não podem ser negativas. Então para a integral ser nula temos que

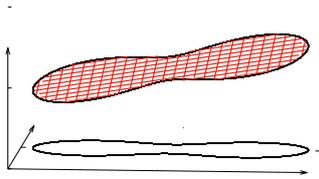
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (26.399)$$

Portanto  $\bar{u}(x, t) = K$  com  $K$  constante, mas a condição inicial  $\bar{u}(x, 0) = 0$  implica  $K = 0$ , ou seja,

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall t \geq 0. \quad (26.400)$$

Logo a solução do problema de Cauchy é única.

## 26.7 Equação de Laplace



Imagine uma membrana elástica (uma bexiga, por exemplo) esticada e presa a um arame que descreve uma curva fechada. A posição da membrana pode ser expressa como uma superfície limitada por uma curva fechada. Suponha também que esta superfície possa ser representada explicitamente pela equação

$$z = u(x, y, t) \quad (26.401)$$

em um domínio compacto  $D$ .

O deslocamento vertical da membrana  $u(x, y, t)$  deve ser solução da equação de onda bidimensional

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (26.402)$$

Queremos encontrar uma solução estacionária para a membrana, isto é, uma solução que não depende explicitamente do tempo, o que implica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = 0 \quad (26.403)$$

em todo o domínio  $D$  e todo  $t \geq 0$ . Então podemos escrever a função  $u$  como função das variáveis  $x$  e  $y$  apenas e a equação diferencial parcial que  $u$  deve satisfazer é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 u = 0. \quad (26.404)$$

O operador  $\nabla^2$  é conhecido como *operador laplaciano* e a equação  $\nabla^2 u = 0$  é conhecida como equação de Laplace. Soluções da equação de Laplace são chamadas também de *funções harmônicas*. A equação de Laplace aparece também no problema de determinar o potencial eletrostático numa região sem carga elétrica.

Na fronteira do domínio, que denotamos por  $\partial D$ , a função  $u(x, y)$  deve satisfazer condições de contorno. Se a altura da membrana é fixada por uma função conhecida  $f(x, y)$ , isto é, se

$$u(x, y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial D, \quad (26.405)$$

temos condições de contorno de Dirichlet. Se a altura da membrana pode variar mas possui derivada direcional na direção normal à fronteira fixada por uma função conhecida  $g(x, y)$ , isto é, se

$$\frac{du}{d\vec{n}} = \vec{\nabla}u \cdot \vec{n} = g(x, y), \forall (x, y) \in \partial D, \quad (26.406)$$

temos condições de Neumann. O problema de encontrar soluções contínuas da equação de Laplace com condições de contorno de Dirichlet chama-se *problema de Dirichlet*.

**Definição 26.1** (Problema de Dirichlet).

Dada uma função contínua  $f$  definida na fronteira de um domínio fechado compacto  $D$ , isto é,  $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ , queremos encontrar uma função  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $u$  é contínua em  $D$ ;
- $\nabla^2 u = 0$  no interior de  $D$ ;
- $u(x, y) = f(x, y)$  em  $\partial D$ .

Este problema é extremamente difícil de ser resolvido em uma região arbitrária  $D$  e em alguns casos é possível mostrar que não existem soluções de um determinado problema de Dirichlet. Os casos gerais que não resolvemos analiticamente muitas vezes podem ser resolvidos numericamente, ou seja, encontramos na verdade uma aproximação da solução em uma grade. Supondo que exista uma solução, podemos ao menos mostrar que a solução é única.

**Teorema 26.6.**

Se uma função  $u(x, y)$  é solução do problema de Dirichlet, então o máximo global de  $u$  ocorre na fronteira do domínio.

*Demonstração.* Como  $u(x, y)$  é contínua em um domínio fechado e compacto  $D$ , pelo teorema de Weierstrass existe um máximo global de  $u$  em  $D$ ,

$$M = \max_{(x, y) \in D} \{u(x, y)\}. \quad (26.407)$$

Seja  $M_f$  o máximo global de  $u$  na fronteira de  $D$ , isto é,

$$M_f = \max_{(x, y) \in \partial D} \{u(x, y)\}. \quad (26.408)$$

Por contradição supomos  $M_f < M$ . Então o máximo global ocorre em um ponto  $(x_0, y_0)$  do interior de  $D$ . Seja

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M - M_f}{2d^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \quad (26.409)$$

onde  $d$  é a maior distância possível entre dois elementos de  $D$ . Se  $D$  é um disco,  $d$  é o diâmetro deste disco. Se  $D$  é um retângulo,  $d$  é o comprimento da diagonal. No ponto  $(x_0, y_0)$  temos

$$v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M. \quad (26.410)$$

Na fronteira de  $D$  temos que

$$v(x, y) \leq M_f + \frac{M - M_f}{2d^2} d^2 = \frac{M + M_f}{2} < M, \quad (26.411)$$

portanto o máximo global de  $v(x, y)$  ocorre no interior de  $D$  em um ponto denotado por  $(x_1, y_1)$ . Neste ponto temos que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, y_1) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_1, y_1) \leq 0, \quad (26.412)$$

que implica

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, y_1) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_1, y_1) = \nabla^2 v(x_1, y_1) \leq 0. \quad (26.413)$$

No entanto aplicando o operador  $\nabla^2$  na equação (26.409) temos

$$\nabla^2 v(x, y) = \nabla^2 u(x, y) + \frac{M - M_f}{2d^2} \nabla^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = \frac{M - M_f}{2d^2} 4 > 0 \quad (26.414)$$

em todos os pontos do interior de  $D$ , o que contradiz o resultado  $\nabla^2 v(x_1, y_1) \leq 0$ . Portanto o máximo global de  $u(x, y)$  ocorre necessariamente na fronteira de  $D$ .  $\square$

No caso de uma membrana esticada presa a um arame, este teorema quer dizer que se existe um ponto da membrana mais alto que qualquer ponto do arame então a função que descreve a membrana não é solução de um problema de Dirichlet. De fato tensão na membrana a faria oscilar de acordo com a equação de onda e a função em questão não seria estacionária. Já no caso do problema do potencial eletrostático no vácuo um potencial mais alto que na fronteira pela lei de Gauß indica a presença de carga elétrica no interior do domínio, e o problema teria que ser modelado pela equação de Poisson e não pela equação de Laplace.

### **Teorema 26.7.**

*Se uma função  $u(x, y)$  é solução do problema de Dirichlet, então o mínimo global de  $u$  ocorre na fronteira do domínio.*

*Demonstração.* Basta aplicar o teorema anterior à função  $-u(x, y)$  que também é solução de um problema de Dirichlet.  $\square$

**Teorema 26.8.**

*Se a condição de contorno de um problema de Dirichlet é nula em toda a fronteira, isto é, se*

$$u(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial D, \quad (26.415)$$

*então a solução  $u(x, y)$  é identicamente nula em todo o domínio  $D$ .*

*Demonstração.* Como o máximo e o mínimo global de  $u$  devem ocorrer na fronteira, então da desigualdade

$$0 = \min_{(x, y) \in D} \{u(x, y)\} \leq u(x, y) \leq \max_{(x, y) \in D} \{u(x, y)\} = 0 \quad (26.416)$$

temos

$$u(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial D. \quad (26.417)$$

$\square$

**Teorema 26.9** (Unicidade da solução do problema de Dirichlet).

*Sejam  $u_1$  e  $u_2$  soluções do mesmo problema de Dirichlet. Então  $u_1(x, y) = u_2(x, y)$  em todo o domínio  $D$ .*

*Demonstração.* Seja  $\bar{u}(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ . O laplaciano desta nova função é dado por

$$\nabla^2 \bar{u}(x, y) = \nabla^2 u_1(x, y) - \nabla^2 u_2(x, y) = 0 - 0 = 0. \quad (26.418)$$

Na fronteira do domínio temos que

$$\bar{u}(x, y) = f(x, y) - f(x, y) = 0. \quad (26.419)$$

Então  $\bar{u}$  é solução de um problema de Dirichlet com condição de contorno nula, portanto  $\bar{u}(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in D$ , ou seja,

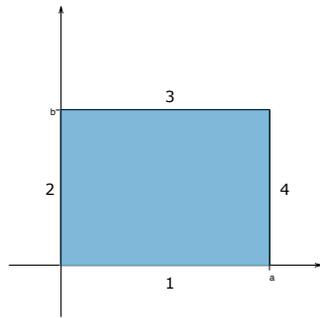
$$u_1(x, y) = u_2(x, y), \quad \forall (x, y) \in D. \quad (26.420)$$

$\square$

### 26.7.1 Problema de Dirichlet no retângulo

O problema de Dirichlet pode ser resolvido por série de Fourier se o domínio  $D$  for um retângulo como no caso de uma fita esticada com bordas presas. Seja

$$D = [0, a] \times [0, b]. \quad (26.421)$$



A fronteira deste domínio é formada por quatro segmentos de reta e podemos escrever a condição de contorno deste problema de Dirichlet como

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad \forall x \in [0, a],$$

$$u(0, y) = f_2(y), \quad \forall y \in [0, b],$$

$$u(x, b) = f_3(x), \quad \forall x \in [0, a],$$

$$u(a, y) = f_4(y), \quad \forall y \in [0, b].$$

Para que esta condição de contorno seja contínua em  $\partial D$ , as funções devem ter o mesmo valor nos cantos, isto é,

$$f_1(0) = f_2(0) = u(0, 0) = A, \quad (26.422)$$

$$f_2(b) = f_3(0) = u(0, b) = B, \quad (26.423)$$

$$f_3(a) = f_4(b) = u(a, b) = C, \quad (26.424)$$

$$f_4(0) = f_1(a) = u(a, 0) = D, \quad (26.425)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são números reais que representam o valor da condição de contorno nos cantos. Podemos definir uma nova função  $u_0(x, y)$  como a função original  $u(x, y)$  menos uma função quadrática

$$u_0(x, y) = u(x, y) - \left( A + \frac{D-A}{a}x + \frac{B-A}{b}y + \frac{A+C-B-D}{ab}xy \right). \quad (26.426)$$

Calculando a nova função nos cantos dos retângulos temos

$$u_0(0, 0) = u(0, 0) - A = A - A = 0, \quad (26.427)$$

$$u_0(0, b) = u(0, b) - \left( A + \frac{B-A}{b}b \right) = B - A - B + A = 0, \quad (26.428)$$

$$\begin{aligned} u_0(a, b) &= u(a, b) - \left( A + \frac{D-A}{a}a + \frac{B-A}{b}b + \frac{A+C-B-D}{ab}ab \right) \\ &= C - A - D + A - B + A - A - C + B + D = 0 \end{aligned} \quad (26.429)$$

e

$$u_0(a,0) = u(a,0) - \left( A + \frac{D-A}{a}a \right) = D - A - D + A = 0. \quad (26.430)$$

Esta nova função  $u_0(x,y)$  é automaticamente nula em todos os quatro cantos do retângulo  $D$ . Se  $u(x,y)$  é contínua em  $D$ , então  $u_0(x,y)$  também deve ser contínua.

As derivadas parciais desta nova função são dadas por

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{D-A}{a} - \frac{A+C-B-D}{ab}y, \quad (26.431)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (26.432)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{B-A}{b} - \frac{A+C-B-D}{ab}x \quad (26.433)$$

e

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (26.434)$$

Então a equação de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  implica  $\nabla^2 u_0 = 0$ . Portanto podemos encontrar a solução do problema de Dirichlet original

$$\nabla^2 u = 0, \quad u(x,0) = f_1(x), \quad u(0,y) = f_2(y), \quad u(x,b) = f_3(x), \quad u(a,y) = f_4(y) \quad (26.435)$$

onde  $u(x,y)$  possui valores não nulos nos cantos do retângulo definindo

$$u_0(x,y) = u(x,y) - \left( A + \frac{D-A}{a}x + \frac{B-A}{b}y + \frac{A+C-B-D}{ab}xy \right). \quad (26.436)$$

onde  $u_0(x,y)$  é solução de um problema de Dirichlet mais simples com condições de contorno

$$u_0(x,0) = u(x,0) - A - \frac{D-A}{a}x = f_1(x) - A - \frac{D-A}{a}x = g_1(x), \quad (26.437)$$

$$u_0(0,y) = u(0,y) - A - \frac{B-A}{b}y = f_2(y) - A - \frac{B-A}{b}y = g_2(y), \quad (26.438)$$

$$\begin{aligned} u_0(x, b) &= u(x, b) - A - \frac{D-A}{a}x - \frac{B-A}{b}b - \frac{A+C-B-D}{ab}xb \\ &= f_1(x) - B - \frac{C-B}{a}x = g_3(x) \end{aligned} \quad (26.439)$$

e

$$u_0(a, y) = u(a, y) - A - \frac{D-A}{a}a - \frac{B-A}{b}y - \frac{A+C-B-D}{ab}ay \quad (26.440)$$

$$= f_4(y) - D - \frac{C-D}{b}y = g_4(x), \quad (26.441)$$

mas agora todas as funções  $g_1(x)$ ,  $g_2(y)$ ,  $g_3(x)$  e  $g_4(y)$  se anulam em seus extremos. Este problema de Dirichlet é particularmente conveniente porque pelo princípio de superposição podemos dividi-lo em quatro problemas de Dirichlet ainda mais simples. Sejam  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  soluções dos seguintes problemas de Dirichlet:

$$\nabla^2 u_1 = 0, \quad u_1(x, 0) = g_1(x), \quad u_1(0, y) = 0, \quad u_1(x, b) = 0, \quad u_1(a, y) = 0, \quad (26.442)$$

$$\nabla^2 u_2 = 0, \quad u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(0, y) = g_2(y), \quad u_2(x, b) = 0, \quad u_2(a, y) = 0, \quad (26.443)$$

$$\nabla^2 u_3 = 0, \quad u_3(x, 0) = 0, \quad u_3(0, y) = 0, \quad u_3(x, b) = g_3(x), \quad u_3(a, y) = 0 \quad (26.444)$$

e

$$\nabla^2 u_4 = 0, \quad u_4(x, 0) = 0, \quad u_4(0, y) = 0, \quad u_4(x, b) = 0, \quad u_4(a, y) = g_4(y) \quad (26.445)$$

Em cada um destes quatro problemas de Dirichlet a condição de contorno é contínua. Resolvendo cada um destes quatro problemas encontramos

$$u_0(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y) \quad (26.446)$$

e com  $u_0(x, y)$  encontramos a solução  $u(x, y)$  do problema de Dirichlet no retângulo.

Veremos aqui como resolver o primeiro destes quatro problemas de Dirichlet simplificados. Pelo método de separação de variáveis escrevemos

$$u_1(x, y) = X(x) \cdot Y(y). \quad (26.447)$$

Substituindo na equação de Laplace  $\nabla^2 u_1 = 0$  temos

$$X''(x)Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0. \quad (26.448)$$

Se  $u_1(x, y)$  não é identicamente nula, podemos dividir esta última equação por  $X(x) \cdot Y(y)$  e obter

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \quad (26.449)$$

ou

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (26.450)$$

Cada lado da equação depende de uma variável diferente, portanto cada lado deve ser igual a uma constante de separação  $\sigma$  implicando as equações diferenciais ordinárias

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad (26.451)$$

$$Y''(y) + \sigma Y(y) = 0. \quad (26.452)$$

No caso da equação do calor e da equação de onda usamos as condições de contorno para determinar os possíveis valores da constante de separação  $\sigma$  e a condição inicial para determinar a amplitude de cada solução. No problema de Dirichlet temos apenas condições de contorno, então temos que escolher qual destas equações diferenciais ordinárias vai determinar os valores possíveis de  $\sigma$ . As condições de contorno deste problema

$$u_1(x, 0) = g_1(x), \quad u_1(0, y) = 0, \quad u_1(x, b) = 0, \quad u_1(a, y) = 0, \quad (26.453)$$

implicam

$$X(x) \cdot Y(0) = g_1(x), \quad X(0) \cdot Y(y) = 0, \quad X(x) \cdot Y(b) = 0, \quad X(a) \cdot Y(y) = 0. \quad (26.454)$$

A primeira destas equações não fixa o valor de  $Y(0)$ . Como não podemos determinar  $X(x)$  ou  $Y(y)$  como identicamente nulas, as demais equações determinam as condições de contorno

$$X(0) = 0, \quad Y(b) = 0, \quad X(a) = 0. \quad (26.455)$$

Como a função  $X(x)$  tem duas condições de contorno simples e  $Y(y)$  apenas uma, determinamos os valores de  $\sigma$  pelo problema de valor de contorno

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad X(0) = 0 \text{ e } X(a) = 0. \quad (26.456)$$

Vimos já nos casos da equação do calor e equação de onda que este problema de valor de contorno admite autovalores negativos

$$\sigma_n = -\frac{n^2 \pi^2}{a^2} \quad (26.457)$$

com autofunções

$$X_n(x) = \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right). \quad (26.458)$$

Para cada  $n$  positivo temos uma equação ordinária distinta para  $Y(y)$

$$Y''(y) - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y(y) = 0 \quad (26.459)$$

que admite soluções da forma

$$Y_n(y) = C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}. \quad (26.460)$$

A condição de contorno  $Y(b) = 0$  relaciona  $C_n$  com  $D_n$

$$Y_n(b) = C_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = 0 \quad (26.461)$$

que resulta em

$$C_n = -D_n e^{-2\frac{n\pi b}{a}}. \quad (26.462)$$

A solução  $Y_n(y)$  é escrita então como

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= -D_n e^{-2\frac{n\pi b}{a}} e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \\ &= D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} \left( e^{\frac{n\pi b}{a}} e^{-\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi b}{a}} e^{\frac{n\pi y}{a}} \right) \\ &= -D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} \left( e^{\frac{n\pi(y-b)}{a}} - e^{-\frac{n\pi(y-b)}{a}} \right) \\ &= \left[ -2D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} \right] \sinh \left( \frac{n\pi(y-b)}{a} \right) \end{aligned} \quad (26.463)$$

A quantidade entre colchetes é uma constante que podemos chamar de  $A_n$ . Então para todo  $n \geq 1$  temos uma solução da equação de Laplace dada por

$$u_n(x, y) = A_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sinh \left( \frac{n\pi(y-b)}{a} \right) \quad (26.464)$$

e pelo princípio de superposição a solução do problema de Dirichlet é

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sinh \left( \frac{n\pi(y-b)}{a} \right). \quad (26.465)$$

Os infinitos valores de  $A_n$  são determinados pela condição de contorno restante  $u_1(x, 0) = g_1(x)$ . Substituindo  $y = 0$  na solução geral encontramos

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sinh \left( -\frac{n\pi b}{a} \right) \quad (26.466)$$

e os coeficientes  $A_n$  são calculados pela série de Fourier da extensão ímpar da função  $g_1(x)$ , isto é,

$$-A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a} \int_0^a g_1(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (26.467)$$

ou

$$A_n = -\frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a g_1(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx. \quad (26.468)$$

Assim a solução  $u_1(x, y)$  está determinada. O cálculo das soluções dos problemas de Dirichlet para as funções  $u_2(x, y)$ ,  $u_3(x, y)$  e  $u_4(x, y)$  é idêntico com algumas pequenas diferenças nas condições de contorno.

### 26.7.2 Problema de Dirichlet no disco

Uma membrana elástica está presa a um arame que descreve uma curva fechada cuja projeção no plano  $x = 0$  é uma circunferência de raio  $a$ . A superfície da membrana pode ser representada explicitamente por

$$z = u(x, y), \quad \forall (x, y) \in D, \quad (26.469)$$

onde  $D$  é um disco de raio  $a$  expresso por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} \quad (26.470)$$

A vibração da membrana deve ser solução da equação de onda

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nabla^2 u = 0. \quad (26.471)$$

Procuramos por soluções estacionárias, então impomos  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  em todo o domínio  $D$ . Portanto a função  $u$  deve ser solução da equação de Laplace  $\nabla^2 u = 0$ . A altura do arame define uma condição de contorno  $u(x, y) = f(x, y)$  se  $x^2 + y^2 = a^2$ , definindo assim um problema de Dirichlet no disco.

Esta condição de contorno é mais complicada de ser aplicada que no caso do problema de Dirichlet no retângulo, pois a fronteira não é mais uma coleção de segmentos de reta com uma coordenada constante. Mas neste caso particular existe um sistema de coordenadas no qual o disco de raio  $a$  é a imagem de um retângulo. Em coordenadas polares escrevemos

$$x = r \cos(\theta), \quad (26.472)$$

$$y = r \sin(\theta). \quad (26.473)$$

Por esta transformação o domínio  $D$  é a imagem do retângulo  $Q = [0, a] \times [0, 2\pi]$ .

A condição de contorno  $u(x, y) = f(x, y)$  se  $x^2 + y^2 = a^2$  em coordenadas polares é escrita como

$$u(r, \theta) = f(\theta) \quad \text{se } r = a \quad (26.474)$$

ou apenas

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad \text{se } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (26.475)$$

Nas outras três fronteiras do retângulo  $Q$  impomos apenas continuidade da solução  $u(r, \theta)$ . Em  $r = 0$  a continuidade de  $u(r, \theta)$  implica apenas que a solução não diverge, então soluções do tipo  $u(r, \theta) = \frac{1}{r}$  são excluídas. Em  $\theta = 0$  e em  $\theta =$

$2\pi$ , as coordenadas  $(r, 0)$  e  $(r, 2\pi)$  representam o mesmo ponto do  $\mathbb{R}^2$ , então a continuidade da solução implica

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad \forall r \in [0, a]. \quad (26.476)$$

Condições de contorno deste tipo são chamadas de *condições de contorno periódicas*.

Resta agora escrever a equação de Laplace em coordenadas polares. Invertendo as equações de transformação temos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (26.477)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (26.478)$$

As derivadas parciais de  $u$  são calculadas pela regra da cadeia.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (26.479)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (26.480)$$

Os termos destas últimas equações valem

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos(\theta)}{r} = \cos(\theta), \quad (26.481)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin(\theta)}{r} = \sin(\theta), \quad (26.482)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin(\theta)}{r^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r} \quad (26.483)$$

e

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos(\theta)}{r^2} = \frac{\cos(\theta)}{r}. \quad (26.484)$$

Então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \left(-\frac{\sin(\theta)}{r}\right), \quad (26.485)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\cos(\theta)}{r}\right). \quad (26.486)$$

As segundas derivadas são

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \cos(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \\ &= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \\ &\quad + \frac{\sin^2(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (26.487)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \sin(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \\ &= \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \\ &\quad + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (26.488)$$

O laplaciano de  $u$  é calculado como

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{\sin^2(\theta)}{r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \left( \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \left( -2 \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} + 2 \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left( 2 \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} - 2 \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (26.489)$$

ou apenas

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad (26.490)$$

que podemos escrever também como

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (26.491)$$

O problema de Dirichlet no disco consiste então em encontrar uma função  $u(r, \theta)$  contínua no disco de raio  $a$ , que satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (26.492)$$

sujeita à condição de contorno

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]. \quad (26.493)$$

Pelo método de Fourier escrevemos

$$u(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta). \quad (26.494)$$

Substituindo este produto na equação de Laplace temos

$$R''(r) \cdot \Theta(\theta) + \frac{1}{r} R'(r) \cdot \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \cdot \Theta''(\theta) = 0. \quad (26.495)$$

Dividindo por  $R(r) \cdot \Theta(\theta)$  (o que supõe que a solução não seja identicamente nula) temos

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0. \quad (26.496)$$

Os dois primeiros termos são funções apenas de  $r$ , mas o último termo depende de  $r$  e de  $\theta$ . Para eliminar esta dependência em  $r$  no último termo devemos multiplicar a equação diferencial por  $r^2$ , resultando em

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\sigma. \quad (26.497)$$

Agora o lado esquerdo depende apenas da variável  $r$  enquanto o lado direito é função apenas de  $\theta$ , portanto cada lado deve ser igual a uma constante de separação  $\sigma$ , reduzindo o problema a duas equações diferenciais ordinárias

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + \sigma R(r) = 0, \quad (26.498)$$

$$\Theta''(\theta) - \sigma \Theta(\theta) = 0. \quad (26.499)$$

A continuidade da solução do problema de Dirichlet exige que a função  $\Theta(\theta)$  seja periódica de período  $2\pi$ , isto é,  $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ . Esta condição quer dizer que se damos uma volta completa no disco a função  $\Theta$  deve voltar para o mesmo valor, não importa de onde começamos a volta, motivo pelo qual dizemos que é uma condição de contorno periódica.

No caso de  $\sigma > 0$  escrevemos  $\sigma = +k^2$  e as soluções da função  $\Theta$  são da forma

$$\Theta(\theta) = C_1 e^{k\theta} + C_2 e^{-k\theta}. \quad (26.500)$$

A condição de contorno periódica exige que

$$C_1 e^{k(\theta+2\pi)} + C_2 e^{-k(\theta+2\pi)} = C_1 e^{k\theta} + C_2 e^{-k\theta} \quad (26.501)$$

ou

$$C_1 e^{2k\pi} e^{k\theta} + C_2 e^{-2k\pi} e^{-k\theta} = C_1 e^{k\theta} + C_2 e^{-k\theta}. \quad (26.502)$$

Estas funções de  $\theta$  são linearmente independentes, então esta equação é satisfeita somente se

$$C_1 e^{2k\pi} = C_1 \quad \text{e} \quad C_2 e^{-2k\pi} = C_2. \quad (26.503)$$

Uma solução simples deste sistema é  $C_1 = C_2 = 0$ , que implicaria a solução trivial que excluímos. A única solução com  $C_1$  ou  $C_2$  não nulos existe  $e^{2k\pi} = 1$  ou  $e^{-2k\pi} = 1$ , que implicam  $k = 0$  e viola a hipótese de  $\sigma > 0$ . Portanto não existem autovalores positivos deste problema de valor de contorno.

Se  $\sigma = 0$  temos

$$\Theta(\theta) = C_1 \theta + C_2. \quad (26.504)$$

A condição de contorno periódica implica

$$C_1 \theta + C_1 2\pi + C_2 = C_1 \theta + C_2 \quad (26.505)$$

ou apenas  $C_1 = 0$ . A constante  $C_2$  é livre, então qualquer função constante é solução da equação diferencial com condições de contorno periódicas. Existe portanto um autovalor nulo do problema de valor de contorno com autofunção

$$\Theta_0(\theta) = \frac{1}{2}. \quad (26.506)$$

Finalmente se  $\sigma < 0$  escrevemos  $\sigma = -k^2$  e a equação diferencial ordinária admite soluções da forma

$$\Theta(\theta) = C_1 \cos(k\theta) + C_2 \sin(k\theta). \quad (26.507)$$

Pela condição  $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$  implica

$$C_1 \cos(k\theta + 2k\pi) + C_2 \sin(k\theta + 2k\pi) = C_1 \cos(k\theta) + C_2 \sin(k\theta), \quad (26.508)$$

que manipulamos como

$$\begin{aligned} & C_1 \cos(k\theta) \cos(2k\pi) - C_1 \sin(k\theta) \sin(2k\pi) \\ & + C_2 \sin(k\theta) \cos(2k\pi) + C_2 \cos(k\theta) \sin(2k\pi) \\ & = C_1 \cos(k\theta) + C_2 \sin(k\theta) \end{aligned} \quad (26.509)$$

ou como

$$\begin{aligned} & [C_1 (\cos(2k\pi) - 1) + C_2 \sin(2k\pi)] \cos(k\theta) \\ & + [C_2 (\cos(2k\pi) - 1) - C_1 \sin(2k\pi)] \sin(k\theta) = 0. \end{aligned} \quad (26.510)$$

Pela independência linear das funções  $\cos(k\theta)$  e  $\sin(k\theta)$  esta equação é nula para todos os valores de  $\theta$  somente se

$$C_1 (\cos(2k\pi) - 1) + C_2 \sin(2k\pi) = 0 , \quad (26.511)$$

$$C_2 (\cos(2k\pi) - 1) - C_1 \sin(2k\pi) = 0 . \quad (26.512)$$

Este sistema linear é homogêneo e obviamente admite a solução  $C_1 = 0$  e  $C_2 = 0$ . No entanto estamos interessados em soluções não nulas. Escrevendo o sistema na forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} (\cos(2k\pi) - 1) & \sin(2k\pi) \\ -\sin(2k\pi) & (\cos(2k\pi) - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26.513)$$

Para que existam soluções não nulas, o determinante desta matriz deve se anular, isto é,

$$(\cos(2k\pi) - 1)^2 + \sin^2(2k\pi) = 0 , \quad (26.514)$$

$$\cos^2(2k\pi) - 2\cos(2k\pi) + 1 + \sin^2(2k\pi) = 0 \quad (26.515)$$

ou apenas

$$2(1 - \cos(2k\pi)) = 0 . \quad (26.516)$$

Esta condição é satisfeita se

$$\cos(2k\pi) = 1 \implies 2k\pi = 2n\pi \implies k = n , \quad (26.517)$$

onde  $n$  é um número inteiro positivo. Os negativos são excluídos porque resultam em funções linearmente dependentes das demais. Existem então autovalores negativos

$$\sigma_n = -n^2 \quad (26.518)$$

com soluções

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) . \quad (26.519)$$

Para cada autovalor possível temos uma equação diferencial ordinária distinta para a função  $R(r)$  expressa por

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0 . \quad (26.520)$$

Esta equação é uma equação de Euler-Cauchy, que admite soluções do tipo  $r^\alpha$  onde

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0 \implies \alpha^2 - n^2 = 0. \quad (26.521)$$

As soluções para cada autovalor são

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \log(r), \quad (26.522)$$

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \quad (26.523)$$

se  $n > 0$ . As funções  $\log(r)$  e  $r^{-n}$  divergem na origem. A condição de que  $u(r, \theta)$  é contínua em todo o disco  $D$  implica que

$$D_n = 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (26.524)$$

Assim a solução da equação de Laplace referente ao autovalor nulo é

$$u_0(r, \theta) = \frac{C_0}{2} \quad (26.525)$$

e as soluções com  $n$  positivo são

$$u_n(r, \theta) = C_n r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \quad (26.526)$$

As constantes  $C_n$  podem ser absorvidas pelas constantes arbitrárias  $A_n$  e  $B_n$ . Por conveniência podemos escrever  $C_0$  como  $A_0$ . Pelo princípio de superposição, a solução geral é dada por

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)). \quad (26.527)$$

Os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  são determinados pela condição de contorno restante

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad (26.528)$$

que implica

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)). \quad (26.529)$$

Se  $f$  satisfaz as condições do teorema de Fourier,

$$a^n A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \implies A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad (26.530)$$

e

$$a^n B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \implies B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad (26.531)$$

onde usamos a propriedade de que as funções são periódicas de período  $2\pi$  para mudar os limites de integração.

**Exemplo 26.11.**

Seja o problema de Dirichlet no disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} \quad (26.532)$$

com condição de contorno

$$u(a, \theta) = A \operatorname{sen}^2(\theta). \quad (26.533)$$

Como visto, a solução da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (26.534)$$

pelo método de separação de variáveis é dada por

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta)). \quad (26.535)$$

Os coeficientes são dados por

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta = A, \quad (26.536)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} A \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{A}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \left( \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta, \quad (26.537)$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi a^n} \left[ \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(2\theta) d\theta \right]. \quad (26.538)$$

Pelas relações de ortogonalidade dos cossenos, a primeira integral é nula e a segunda integral é diferente de zero somente se  $n = 0$ , isto é,  $A_2 = -\frac{A}{2a^2}$  e  $A_n = 0$  se  $n \neq 2$ .

$$B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} A \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta = \frac{A}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n\theta) \left( \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta. \quad (26.539)$$

Pelas relações de ortogonalidade, todos estes termos são nulos. Então a solução deste problema de Dirichlet é

$$u(r, \theta) = \frac{A}{2} + r^2 \left( -\frac{A}{2a^2} \right) \cos(2\theta) = \frac{A}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \cos(2\theta) \right). \quad (26.540)$$

## 26.8 Classificação geral de equações de segunda ordem lineares

Se  $u(x, y)$  é uma função de duas variáveis de classe  $C^2$ , o caso mais geral de uma equação diferencial parcial linear é

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y) u(x, y) = g(x, y). \quad (26.541)$$

Se  $g(x, y) = 0$ , dizemos que a equação diferencial é homogênea. Se  $g(x, y) \neq 0$ , a equação é não homogênea. Se cada função de  $a(x, y)$  até  $f(x, y)$  forem constantes, dizemos que a equação é de coeficientes constantes.

Esta equação é análoga à equação quadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (26.542)$$

Sabemos como por uma transformação de coordenadas eliminar o termo misto  $bxy$  e classificar a curva como uma elipse, parábola, hipérbole ou casos degenerados.

Da mesma forma, podemos eliminar o termo misto  $b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  por uma transformação de coordenadas. Seja a transformação

$$x = X(\xi, \eta), \quad (26.543)$$

$$y = Y(\xi, \eta). \quad (26.544)$$

$$(26.545)$$

Queremos escrever a equação diferencial parcial em termos das novas variáveis  $\xi$  e  $\eta$ . Para isso calculamos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (26.546)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (26.547)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \dots, \quad (26.548)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dots,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \dots, \quad (26.549)$$

onde as reticências indicam derivadas de primeira ordem em  $u$  que podem ser ignoradas nesta análise. Substituindo estes termos na expressão  $a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  encontramos

$$\begin{aligned} & a(x, y) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] \\ & + b(x, y) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dots \right] \\ & + c(x, y) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Agrupando os termos que multiplicam  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$  encontramos

$$\begin{aligned} & \left[ a(x, y) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x, y) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ & + \left[ 2a(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x, y) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2c(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ & \left[ a(x, y) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x, y) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots \end{aligned}$$

que podemos expressar como

$$A(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots, \quad (26.550)$$

que é a forma que os termos quadráticos da equação diferencial parcial assumem após a transformação de coordenadas. Queremos que nestas novas coordenadas o termo misto  $B(\xi, \eta)$  seja nulo. Então basta encontrar uma transformação que satisfaz

$$2a(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x, y) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2c(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (26.551)$$

que é uma equação diferencial parcial para as transformações inversas

$$\xi = f(x, y), \quad (26.552)$$

$$\eta = g(x, y). \quad (26.553)$$

Como temos duas funções desconhecidas precisamos de mais uma condição para determinar a transformação. Podemos escolher por exemplo  $A(\xi, \eta) = 1$  e a equação diferencial

$$a(x, y) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x, y) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 1 \quad (26.554)$$

acoplada com a equação  $B(\xi, \eta) = 0$  determina a transformação de coordenadas e os outros coeficientes da equação diferencial parcial.

Se calcularmos a quantidade  $B^2 - 4AC$  encontramos

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= \left[ 2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]^2 \\ &- 4 \left[ a \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot \left[ a \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (26.555)$$

Após inúmeras operações distributivas encontramos

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 4a^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 4ab \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ &+ 8ac \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + b^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 4bc \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ &+ 4c^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 - 4a^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - 4ab \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &- 4ac \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 - 4ab \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 4b^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &- 4bc \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 4ac \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - 4bc \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &- 4c^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (26.556)$$

Os termos proporcionais a  $a^2$ ,  $c^2$ ,  $ab$  e  $bc$  se cancelam. Os termos restantes são

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= b^2 \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - 4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \\ &+ 4ac \left[ 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

Estes termos entre colchetes são quadrados perfeitos

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \quad (26.557)$$

que reconhecemos como o jacobiano ao quadrado das transformações de coordenadas.

Resumindo, por uma transformação de coordenadas a equação diferencial parcial

$$a(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots = 0 \quad (26.558)$$

é transformada na equação diferencial parcial

$$A(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots = 0 \quad (26.559)$$

onde

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac) \left( \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right)^2. \quad (26.560)$$

Em outras palavras, o sinal da quantidade  $b^2 - 4ac$  não é alterado por uma transformação de coordenadas arbitrário e podemos classificar a equação diferencial pelo sinal desta quantidade.

Se  $b^2 - 4ac > 0$ , dizemos que a equação diferencial parcial é *hiperbólica* e existe uma transformação de coordenadas que transforma a equação original na equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots = 0, \quad (26.561)$$

ou seja, pode ser resolvida como uma equação de onda identificando a variável  $\eta$  como se fosse o tempo.

Se  $b^2 - 4ac = 0$ , dizemos que a equação diferencial parcial é *parabólica* e existe uma transformação de coordenadas que transforma a equação original na equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dots = 0, \quad (26.562)$$

ou seja, pode ser resolvida como uma equação do calor, novamente identificando a variável  $\eta$  como se fosse o tempo.

Por fim, se  $b^2 - 4ac < 0$ , dizemos que a equação diferencial parcial é *elíptica* e existe uma transformação de coordenadas que transforma a equação original na equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots = 0, \quad (26.563)$$

ou seja, pode ser resolvida como uma equação de Laplace.

Portanto o caso mais geral de uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem de uma função de duas variáveis pode ser reduzido a três casos. Então o estudo destes três casos particulares é importante não só pelos sistemas físicos que eles descrevem.

## 26.9 Equação de onda tridimensional

O som é uma onda mecânica de pressão e deslocamento que se propaga em um meio como o ar. A velocidade de um fluido é descrita pelas equações de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \left( \lambda + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{f} \quad (26.564)$$

e pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (26.565)$$

onde  $\vec{v}$  é o campo de velocidades do fluido,  $\rho$  é a densidade,  $p$  é a pressão,  $\mu$  e  $\lambda$  são coeficientes de viscosidade e  $\vec{f}$  é uma densidade de força externa.

A pressão e a densidade também estão relacionadas por uma equação de estado. No caso de um gás ideal a equação de estado é

$$pV = nRT \quad \text{ou} \quad p = C\rho \quad (26.566)$$

se a temperatura e o número de mols do gás é mantida constante. Uma generalização da equação de estado é dada pela equação de van der Waals

$$\left( p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad \text{ou} \quad p = \frac{C\rho}{1 - B\rho} - A\rho^2 \quad (26.567)$$

com  $A$ ,  $B$  e  $C$  constantes. Escreveremos a equação de estado apenas como

$$p = F(\rho). \quad (26.568)$$

Estas equações formam um sistema de equações diferenciais parciais não linear, o que torna o problema de encontrar a pressão, densidade e velocidade de um fluido extremamente difícil. O método de Fourier não é capaz de resolver estas equações.

Podemos no entanto considerar o som como uma *perturbação* de uma solução conhecida simples. A solução mais simples destas equações é um fluido parado ( $\vec{v} = \vec{0}$ ), com densidade  $\rho_0$  constante e pressão  $p_0$  constante relacionadas pela equação de estado  $p_0 = F(\rho_0)$ . Sejam  $\vec{v}$ ,  $p$  e  $\rho$  pequenas variações desta solução trivial, isto é,

$$p = p_0 + \Delta p, \quad \rho = \rho_0 + \Delta \rho \quad \text{e} \quad \vec{v} = \vec{0} + \Delta \vec{v}. \quad (26.569)$$

As perturbações  $\Delta p$  e  $\Delta \rho$  estão relacionadas pela derivada da equação de estado

$$\Delta p = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} \Delta \rho = F'(\rho_0) \Delta \rho. \quad (26.570)$$

A equação da continuidade em termos destas perturbações é escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \Delta\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \Delta\vec{v} + \Delta\rho \cdot \Delta\vec{v}) = 0. \quad (26.571)$$

Como  $\rho_0$  é constante, podemos anular a derivada no tempo deste termo. Por serem perturbações desprezamos também a quantidade  $\Delta\rho \cdot \Delta\vec{v}$  por ser muito menor que as demais quantidades. Assim a equação da continuidade é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta\rho) + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{v}) = 0. \quad (26.572)$$

Na equação de Navier-Stokes desprezamos as viscosidades e forças externas, resultando na equação de Euler

$$(\rho_0 + \Delta\rho) \left( \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\vec{v}) + (\Delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \Delta\vec{v} \right) + \vec{\nabla} (p_0 + \Delta p) = 0. \quad (26.573)$$

O termo  $p_0$  é constante, então  $\vec{\nabla} p_0$  é nulo. O termo  $(\Delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \Delta\vec{v}$  é quadrático na perturbação  $\Delta\vec{v}$  e também pode ser desprezado. Além disso há um termo  $\Delta\rho \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\vec{v})$  que é um produto de duas perturbações e também desprezamos. Os termos restantes são

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\vec{v}) + \vec{\nabla} (\Delta p) = 0. \quad (26.574)$$

Substituindo  $\Delta\rho = \frac{\Delta p}{F'(\rho_0)}$  na equação de continuidade linearizada temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Delta p}{F'(\rho_0)} \right) + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{v}) = 0. \quad (26.575)$$

O termo  $F'(\rho_0)$  é constante. Derivando esta última expressão em relação ao tempo encontramos

$$\frac{1}{F'(\rho)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta p) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{v})) = 0. \quad (26.576)$$

A derivada parcial em relação a  $t$  comuta com o operador  $\nabla$ , então escrevemos a equação acima como

$$\frac{1}{F'(\rho)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta p) + \vec{\nabla} \cdot \left( \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \Delta\vec{v} \right) = 0. \quad (26.577)$$

O termo no divergente é substituído de acordo com a equação de Euler linearizada, resultando em

$$\frac{1}{F'(\rho)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta p) + \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} (\Delta p)) = 0 \quad (26.578)$$

ou

$$\frac{1}{F'(\rho)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta p) - \nabla^2 (\Delta p) = 0 . \quad (26.579)$$

Escrevendo a perturbação da pressão como

$$\Delta p = u(t, x, y, z) , \quad (26.580)$$

a função  $u$  deve ser solução da equação de onda tridimensional

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0 , \quad (26.581)$$

com velocidade do som dada por

$$c = \sqrt{F'(\rho_0)} = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}} . \quad (26.582)$$

Conhecendo a solução para  $u(t, x, y, z)$  calculamos a velocidade pela equação de Euler e a densidade pela equação da continuidade.

Considere que o fluido em questão está no interior de um tambor de raio  $R$  e altura  $h$ , com uma membrana circular no topo e aberto embaixo. Orientando o eixo de simetria do tambor ao longo do eixo  $z$ , a perturbação  $u$  está contida em um cilindro

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ e } 0 \leq z \leq h \} . \quad (26.583)$$

É conveniente descrever este domínio em coordenadas cilíndricas, ou seja,

$$x = r \cos(\theta) , \quad (26.584)$$

$$y = r \sin(\theta) , \quad (26.585)$$

$$z = z , \quad (26.586)$$

onde  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq z \leq h$ . Na parede do tambor a condição de adesão implica

$$u(t, R, \theta, z) = 0 . \quad (26.587)$$

A condição de contorno periódica implica

$$u(t, r, \theta + 2\pi, z) = u(t, r, \theta, z) . \quad (26.588)$$

Na membrana circular localizada em  $z = h$  a velocidade do fluido por adesão deve ser igual à velocidade da membrana, que é dada pela vibração de uma membrana

circular. Se considerarmos que a membrana é rígida o suficiente, podemos aproximar a condição de contorno em  $z = h$  como

$$u(t, r, \theta, h) = 0. \quad (26.589)$$

No fundo do tambor, em  $z = 0$ , o fluido está a céu aberto e consideramos o fluido como na pressão atmosférica  $p_0$ , ou seja, consideramos também

$$u(t, r, \theta, 0) = 0. \quad (26.590)$$

Se inicialmente o ar dentro do tambor não está perturbado e uma pancada no tambor transfere uma variação na pressão, temos as condições iniciais

$$u(0, r, \theta, z) = 0 \quad (26.591)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, r, \theta, z) = g(r, \theta, z). \quad (26.592)$$

A equação de onda em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (26.593)$$

Pelo método de Fourier escrevemos

$$u(t, r, \theta, z) = T(t) \cdot R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \quad (26.594)$$

e a equação de onda assume a forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} T''(t) \cdot R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) - T(t) \cdot R''(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) - \frac{1}{r} T(t) \cdot R'(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \\ & - \frac{1}{r^2} T(t) \cdot R(r) \cdot \Theta''(\theta) \cdot Z(z) - T(t) \cdot R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z''(z). \end{aligned} \quad (26.595)$$

Dividindo por  $u(t, r, \theta, z)$  temos

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{R''(r)}{R(r)} - \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0. \quad (26.596)$$

Começamos pela função  $Z(z)$  que tem as condições de contorno mais simples. Passando o termo que depende de  $z$  para o outro lado da igualdade temos

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{R''(r)}{R(r)} - \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)}. \quad (26.597)$$

O lado esquerdo não depende de  $z$  enquanto o lado direito depende apenas de  $z$ . Então cada lado deve ser igual a uma constante de separação  $\sigma_1$ , implicando o problema de valor de contorno

$$Z''(z) - \sigma_1 Z(z) = 0, \quad Z(0) = 0 \quad \text{e} \quad Z(h) = 0. \quad (26.598)$$

Este problema de valor inicial admite autovalores negativos

$$\sigma_1 = -\frac{m^2 \pi^2}{h^2} \quad (26.599)$$

com  $m$  inteiro. As autofunções são dadas por

$$Z_m(z) = \text{sen} \left( \frac{m\pi z}{h} \right). \quad (26.600)$$

As demais funções satisfazem

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{R''(r)}{R(r)} - \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{m^2 \pi^2}{h^2}. \quad (26.601)$$

Agora queremos isolar a função  $\Theta(\theta)$ . Devemos então multiplicar a equação diferencial por  $r^2$  e passar alguns termos para o outro lado da igualdade, resultando em

$$\frac{r^2 T''(t)}{c^2 T(t)} - r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} - r \frac{R'(r)}{R(r)} + r^2 \frac{m^2 \pi^2}{h^2} = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}. \quad (26.602)$$

Cada lado da equação depende de variáveis distintas, portanto é igual a uma constante de separação  $\sigma_2$  e a função  $\Theta$  é solução da equação diferencial

$$\Theta''(\theta) - \sigma_2 \Theta(\theta) = 0 \quad (26.603)$$

com condições de contorno periódicas

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta), \quad (26.604)$$

que, como visto no problema de Dirichlet no disco, possui autovalores

$$\sigma_2 = -n^2 \quad (26.605)$$

com  $n$  inteiro e autofunções

$$\Theta_n(\theta) = C_n \cos(n\theta) + D_n \text{sen}(n\theta). \quad (26.606)$$

Agora as funções  $R$  e  $T$  satisfazem

$$\frac{r^2 T''(t)}{c^2 T(t)} - r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} - r \frac{R'(r)}{R(r)} + r^2 \frac{m^2 \pi^2}{h^2} = -n^2. \quad (26.607)$$

Agora dividimos a equação por  $r^2$  e isolamos o termo que depende de  $t$ .

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{m^2 \pi^2}{h^2} - \frac{n^2}{r^2}. \quad (26.608)$$

Novamente cada lado da equação depende de uma variável diferente, então cada lado deve ser uma constante de separação  $\sigma_3$ . A equação diferencial ordinária para  $R(r)$  é

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{n^2}{r^2} = \sigma_3 + \frac{m^2 \pi^2}{h^2}. \quad (26.609)$$

Queremos que o lado direito seja um número negativo. Assim escrevemos Podemos simplificar a equação definindo  $-a^2 = \frac{m^2 \pi^2}{h^2} + \sigma_3$ . A equação diferencial multiplicada por  $r^2 R(r)$  é então

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (a^2 r^2 - n^2) R(r) = 0. \quad (26.610)$$

Com uma mudança de variáveis  $x = ar$  temos

$$R'(r) = \frac{dR}{dx} \frac{dx}{dr} = a \frac{dR}{dx} \quad (26.611)$$

e

$$R''(r) = a^2 \frac{d^2 R}{dx^2}. \quad (26.612)$$

Escrevemos a equação diferencial como

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 a^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(\frac{x}{a}\right) a \frac{dR}{dx} + \left(a^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - n^2\right) R(x) = 0. \quad (26.613)$$

Após cancelar os termos  $a$  temos

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - n^2) R(x) = 0. \quad (26.614)$$

Esta equação é a equação de Bessel, cuja solução é

$$R(x) = AJ_n(x) + BN_n(x), \quad (26.615)$$

onde  $J_n(x)$  são as funções de Bessel do primeiro tipo e  $N_n(x)$  são as funções de Neumann. Escrevendo em termos da variável  $r$  temos

$$R(r) = AJ_n(ar) + BN_n(ar), \quad (26.616)$$

Os índices destas funções são inteiros, e as funções de Neumann divergem como  $\log(r)$  na origem. A condição de que a solução deve ser contínua na origem impõe  $B = 0$ . Então as soluções para  $R$  são apenas

$$R(r) = AJ_n(ar). \quad (26.617)$$

A condição de contorno  $u(t, R, \theta, z) = 0$  implica  $R(R) = 0$ , que impõe

$$R(R) = AJ_n(aR). \quad (26.618)$$

Para que exista uma solução não trivial, a quantidade  $aR$  deve ser um zero da função de Bessel. Assim como as funções seno e cosseno, as funções de Bessel possuem infinitos zeros ao longo da reta real. Ao contrário das funções trigonométricas, os zeros da função de Bessel não possuem uma expressão simples e seus valores são tabelados. Para cada valor inteiro positivo  $n$  existem infinitas soluções do problema de valor de contorno encontramos uma solução para cada zero da função de Bessel de rótulo  $n$  tal que

$$aR = \alpha_{nl}, \quad (26.619)$$

onde  $\alpha_{nl}$  indica o  $l$ -ésimo zero da função de Bessel de ordem  $n$ . Assim as soluções para  $R(r)$  são dadas por

$$R_{nl} = A_{nl} J_n\left(\alpha_{nl} \frac{r}{R}\right). \quad (26.620)$$

Finalmente chegamos à função  $T(t)$ , que satisfaz

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma_3 = -\left(\frac{\alpha_{nl}^2}{R^2} + \frac{m^2 \pi^2}{h^2}\right) = -\frac{\omega^2}{c^2}. \quad (26.621)$$

As soluções desta equação diferencial são

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (26.622)$$

A condição inicial  $u(0, R, \theta, z)$  implica  $T(0) = 0$  e  $A = 0$ . Então as soluções possíveis para  $T$  são apenas os senos. Para cada valor de  $n$ ,  $l$  e  $m$  temos uma solução

$$u_{nlm}(t, r, \theta, z) = \sin(\omega t) J_n\left(\alpha_{nl} \frac{r}{R}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) (C_{nlm} \cos(n\theta) + D_{nlm} \sin(n\theta))$$

(26.623)

e a solução geral é a soma de todos estes modos de vibração. Os valores das constantes restantes são determinadas pela condição inicial ainda não utilizada e pelas relações de ortogonalidade destas diversas funções.

A frequência de vibração de cada modo é dada pela grandeza

$$\omega = c \sqrt{\frac{\alpha_{nl}^2}{R^2} + \frac{m^2 \pi^2}{h^2}} . \quad (26.624)$$

Conhecendo os zeros da função de Bessel sabemos calcular a frequência do som de um tambor em função do raio  $R$  e da altura  $h$  do cilindro. Esta análise ignora a resistência do ar. Esta resistência implica um termo adicional na equação diferencial ordinária para  $T(t)$  e uma ligeira modificação nas frequências. Além disso cada modo de vibração possui um decaimento diferente e o modo com menor decaimento é responsável pelo som do tambor.