Lista de exercícios 4
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

2020.1

1. Considerando o espaço euclidiano[1] $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, calcule $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ nos seguintes casos:

   (a) $\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$ e $\boldsymbol{v} = (4, 1, -3)$

   (b) $\boldsymbol{u} = (2, 1, 0)$ e $\boldsymbol{v} = (4, 0, 2)$

   (c) $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$ e $\boldsymbol{v} = (1, 0, -1)$

2. Mostre que, em um espaço euclidiano complexo, todo produto interno tem as seguintes propriedades:

   (a) $\langle \alpha\boldsymbol{u}, \beta\boldsymbol{v} \rangle = \overline{\alpha}\beta \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$

   (b) $\langle \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \overline{\beta} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$

3. Sejam $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vetores arbitrários de $\mathbb{C}^n$. Verifique se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, definido em cada item abaixo, é um produto interno em $\mathbb{C}^n$. Em caso negativo, enumere os axiomas que não são verificados.

   (a) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i |v_i|$

   (b) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \left| \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right|$

   (c) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} v_j$

   (d) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

   (e) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \sum_{i=1}^{n} v_i^2$

   Nota: para $v_i \in \mathbb{C}$, $|v_i| = \sqrt{\overline{v_i} v_i}$.

4. Usando o produto interno $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ em $P_2(\mathbb{R})$, calcule o produto interno entre:

   (a) $f(t) = t$ e $g(t) = 1 - t^2$

   (b) $f(t) = t - \frac{1}{2}$ e $g(t) = \frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)$.

5. No espaço vetorial real $C([1, e])$, das funções contínuas no intervalo $[1, e]$ e produto interno dado por:

   $$\langle f, g \rangle = \int_1^e (\ln t) f(t) g(t)\,\mathrm{d}t,$$

   Determine *um* polinômio linear $g(t) = a + bt$ tal que $\langle 1, g \rangle = 0$.

[1] Um *espaço euclidiano* é um espaço vetorial dotado de um produto interno