Lista de exercícios 00
Álgebra Linear – 2020.1

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Blitz: Quinta-feira 27/02/2020

Notação: Neste curso, *não* utilizaremos a notação $\vec{v}$ para representar vetores. Adotaremos a convenção tipográfica usual de representar os vetores em negrito $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots)$ em material impresso e como letras latinas minúsculas normais (u, v, w, ...) em material à mão. Escalares (números) serão normalmente representados por letras gregas minúsculas $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

1. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$:

   - $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0); \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0); \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$
   - $\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0); \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0); \mathbf{v}_3 = (\frac{-1}{2}, 0, \frac{3}{2})\}$

   Verifique que o vetor $\mathbf{u} = (2, -1, 3) = 2\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ é igual ao vetor $3\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

2. Considere os seguintes polinômios de grau menor ou igual a 2:

   - $\{ f_0(x) = 1; f_1(x) = x; f_2(x) = x^2 \}$
   - $\{ g_0(x) = 1; g_1(x) = x; g_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \}$

   Verifique que o polinômio $f(x) = 3x^2 - x + 2 = 2f_0(x) - 1f_1(x) + 3f_2(x)$ é igual a $f(x) = 3g_0(x) - 1g_1(x) + 2g_2(x)$.

3. Considere as seguintes matrizes 2×2:

   - $\left\{ A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
   - $\left\{ B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

   Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 2A_0 - 1A_1 + 3A_2$ é igual à combinação $A = 3B_0 - 1B_1 + 2B_2$.

4. Qual ponto do eixo x é equidistante[1] dos pontos $(1, -3)$ e $(3, -1)$ no plano?

5. Obtenha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, o *produto escalar* ou *interno* entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$:

[1] Dois pontos são equidistantes de um terceiro quando se apresentam à mesma distância desse ponto.

(a) $\mathbf{a} = (6, -2, 3)$; $\mathbf{b} = (2, 5, -1)$
(b) $\mathbf{a} = (p, -p, 2p)$; $\mathbf{b} = (2q, q - q)$
(c) $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$; $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$
(d) $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$; $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_3$

6. Dados os vetores $\mathbf{u} = (2, -3, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1, 4)$, calcular:

   (a) $2\mathbf{u} \cdot (-\mathbf{v})$
   (b) $(\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - 2\mathbf{u})$
   (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
   (d) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})$

7. Sejam os vetores $\mathbf{u} = (2, a, -1)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$ e $\mathbf{w} = (2a - 1, -2, 4)$. Determine o valor de a de forma que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

8. Identifique a cônica e encontre o(s) vértice(s) e foco(s):

   (a) $x^2 = y + 1$
   (b) $x^2 = y^2 + 1$
   (c) $x^2 = 4y - 2y^2$
   (d) $4x^2 + 4x + y^2 = 0$

9. Obtenha uma equação para a cônica que satisfaz às condições:

   (a) Parábola. Vértice $(0, 0)$, foco $(1, 0)$.
   (b) Parábola. Foco $(4, 0)$, diretriz $x = 2$.
   (c) Elipse. Focos $(\pm 2, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$.
   (d) Elipse. Focos $(0, 2)$ e $(0, 6)$; vértices $(0, 0)$ e $(0, 8)$.
   (e) Hipérbole. Vértices $(\pm 3, 0)$, focos $(\pm 5, 0)$.
   (f) Hipérbole. Vértices $(-3, -4)$ e $(-3, 6)$, focos $(-3, -7)$, $(-3, 9)$.

10. Para um número real α considere a matriz $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

    (a) Mostre que $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$.
    (b) Mostre que $R_{-\alpha} = R_\alpha^T$.

11. Obtenha todos os valores de λ para os quais $\det(A) = 0$.

    (a) $A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{bmatrix}$
    (b) $A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$

12. Calcule as seguintes integrais:

    (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2\right)\left(x^2\right)\, dx$
    (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2\right)(x)\, dx$
    (c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x))(\cos(x))\, dx$
    (d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x))(\cos(2x))\, dx$