Lista de exercícios 8
Cálculo I

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: Quinta-feira 17/10/2019

1. Use a derivada das funções para demonstrar que:
   (a) para todo $x \geqslant 0$, $e^x > x$
   (b) para todo $x \geqslant 0$, $e^x > \dfrac{x^2}{2}$
   (c) Conclua de (b) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e pontos de inflexão e esboce os gráficos das funções abaixo, calculando os limites necessários:
   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
   (b) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$
   (c) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$
   (d) $f(x) = xe^x$
   (e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
   (f) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

3. Quando um corpo estranho alojado na traqueia força uma pessoa a tossir, o diafragma dá um impulso para cima, causando um aumento de pressão nos pulmões. Isto é acompanhado por uma contração da traqueia, que cria um canal mais estreito para o ar expelido fluir.

   Em um canal estreito, para que uma dada quantidade de ar escape em certo intervalo de tempo, o ar deve se mover mais rápido, comparado com um canal mais largo. Quanto maior a velocidade do fluxo de ar, maior a força sobre o corpo estranho.

   Exames de raios X mostram que o raio do tubo traqueal, circular, se contrai para cerca de dois terços do normal durante a tosse. De acordo com o modelo matemático da tosse, a velocidade v do fluxo de ar está relacionada ao raio r da traqueia pela equação

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2; \qquad \frac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0,$$

   onde k é uma constante e r_0 é o raio normal da traqueia. A restrição nos valores de r se deve ao fato de que a parede traqueal se enrijece sob pressão e evita uma contração maior que $\frac{1}{2}r_0$, que sufocaria a pessoa.
   (a) Determine o valor de r no intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ em que v tem um máximo global. Como isso se compara com a evidência experimental acima?
   (b) Qual é o valor máximo de v nesse intervalo?
   (c) Esboce o gráfico de v nesse intervalo.

4. Sejam a e b números reais positivos. Encontre o valor máximo de

$$f(x) = x^a(1-x)^b, \ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

5. Um modelo para o preço em dólares do barril de petróleo bruto, entre 2008 e 2018, é dado pela equação
$$P(t) = -0,0267t^5 + 1,01t^4 - 12,8t^3 + 65,0t^2 - 117t + 133$$
onde t é medido em anos a partir de janeiro de 2008. *Estime* as épocas em que o petróleo estava mais caro e mais barato no período, calculando a derivada dessa função em certos pontos (de meio em meio ano, por exemplo, utilizando uma calculadora para obter o valor numérico) para encontrar as épocas de máximos e mínimos.
Como exercício de especulação, leve em conta os fenômenos econômicos e políticos que tiveram destaque no país nessas épocas.

6. Calcule os seguintes limites, fazendo uso das regras de L'Hospital:
   (a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1}$
   (b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$
   (c) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$
   (d) $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$
   (e) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$
   (f) $\lim_{x\to 0^+} [\cos 3x]^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

7. Calcule
   (a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$
   (b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} + 1}$
   (c) $\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$
   (d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$
   (e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$
   (f) $\lim_{x\to 0^+} x^{\tan(x^2)}$

8. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em torno do x_0 dado.
   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x;\ x_0 = 0$
   (b) $f(x) = \cos x;\ x_0 = 0$
   (c) $f(x) = \operatorname{sen} x;\ x_0 = \frac{\pi}{2}$
   (d) Compare os polinômios dos itens (b) e (c).
   (e) $f(x) = \ln x;\ x_0 = 1$
   (f) $f(x) = \sqrt[3]{x};\ x_0 = 1$
   (g) $f(x) = (1 + x)^{\alpha};\ x_0 = 0$ e α constante