Lista de exercícios 7
Cálculo I – Turma 02

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: Sexta-feira 08/11/2019

1. A função $y = f(x)$ é dada implicitamente pela equação $xy + 3 = 2x$. Mostre que $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - y$. Calcule $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}$.

2. Determine a equação da reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto x_0, y_0, com $y_0 \neq 0$.

3. Seja $A = l^2$, $l > 0$.
   (a) Calcule a diferencial $\mathrm{d}A$.
   (b) Interprete geometricamente o erro que se comete na aproximação de ΔA por $\mathrm{d}A$ se A for a área de um quadrado de lado l.

4. Quando o sangue flui por uma artéria, o fluxo F (volume de sangue que passa por um ponto por unidade de tempo) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso sanguíneo:

   $$F = kR^4.$$

   Uma artéria parcialmente obstruída pode ser expandida através de uma cirurgia chamada angioplastia, em que um balão na ponta de um catéter é inflado na artéria para alargá-la e restabelecer o fluxo sanguíneo normal. Mostre que a variação relativa do fluxo $\left(\frac{\Delta F}{D}\right)$ é quatro vezes a variação relativa do raio $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$. Como um aumento de 5 % no raio da artéria afeta o fluxo sanguíneo?

5. A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo x depende do tempo de acordo com a equação $x = -t^3 + 3t^2$, $t \geqslant 0$.
   (a) Estude os sinais de $v(t)$.
   (b) Estude os sinais de $a(t)$.
   (c) Calcule $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} (-t^3 + 3t)$
   (d) Esboce o gráfico da função $x = -t^3 + 3t^2$, $t \geqslant 0$.

6. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e pontos de inflexão e esboce os gráficos das funções abaixo, calculando os limites necessários:
   (a) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$
   (b) $f(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$
   (c) $f(x) = xe^x$
   (d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
   (e) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

7. Quando um corpo estranho alojado na traqueia força uma pessoa a tossir, o diafragma dá um impulso para cima, causando um aumento de pressão nos pulmões. Isto é acompanhado por uma contração da traqueia, que cria um canal mais estreito para o ar expelido fluir.

   Em um canal estreito, para que uma dada quantidade de ar escape em certo intervalo de tempo, o ar deve se mover mais rápido, comparado com um canal mais largo. Quanto maior a velocidade do fluxo de ar, maior a força sobre o corpo estranho.

   Exames de raios X mostram que o raio do tubo traqueal, circular, se contrai para cerca de dois terços do normal durante a tosse.

   De acordo com o modelo matemático da tosse, a velocidade v do fluxo de ar está relacionada ao raio r da traqueia pela equação

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2; \qquad \frac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0,$$

   onde k é uma constante e r_0 é o raio da traqueia relaxada. A restrição nos valores de r se deve ao fato de que a parede traqueal se enrijece sob pressão e evita uma contração maior que $\frac{1}{2}r_0$, que sufocaria a pessoa.

   (a) Determine o valor de r no intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ em que v tem um máximo global. Como isso se compara com a evidência experimental obtida pelos raios X?

   (b) Qual é o valor máximo de v nesse intervalo?

   (c) Esboce o gráfico de v nesse intervalo.

8. Calcule

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} + 1}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\tan\left(x^2\right)}$

9. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em torno do x_0 dado.

   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x;\ x_0 = 0$

   (b) $f(x) = \cos x;\ x_0 = 0$

   (c) $f(x) = \operatorname{sen} x;\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

   (d) Compare os polinômios dos itens (b) e (c).

   (e) $f(x) = \ln x;\ x_0 = 1$

10. De acordo com a teoria da relatividade, o momento linear de uma partícula de massa m_0 e velocidade v é dado por

$$p(v) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

   Vamos chamar de u a relação $u = \frac{v}{c}$, que é a velocidade em unidades tais que a velocidade da luz $c = 1$. Assim, o momento linear fica:

$$p(u) = \frac{m_0 uc}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

   (a) Escreva o polinômio de Taylor de ordem 3 para $p(u)$, em torno de $u_0 = 0$.

   (b) Quando $u \ll 1$ (u muito menor que 1), os termos do tipo u^2 ficam *desprezíveis* e podem ser descartados. Nesse caso, o momento $p(u)$ é muito bem aproximado pelo seu polinômio de Taylor de ordem 1. Compare esse polinômio com o momento linear clássico: $p(v) = m_0 v$.

(c) Como exemplo, calcule o valor do termo de segundo grau para $m_0 = 1\,\mathrm{kg}$, $v = 100\,\mathrm{m/s}$ $\left(u = \dfrac{1}{3 \times 10^6}\right)$ e compare com o termo de primeiro grau. Essa é a chamada *correção de segunda ordem* no valor do momento.