Lista 1 — Exercício 1

Prof. Elton Carvalho

14 de Outubro de 2019

Enunciado, item (b)

Seja $f(x) = x^2 - 2x$. Obtenha um δ, que depende de p, tão pequeno que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ sempre que $|x - p| < \delta$.

Solução

Precisamos obter um δ que valide a condição

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon,$$

ou seja

$$|x - p| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - 2x - (p^2 - 2p)\right| < \varepsilon,$$

para um ε dado.

O procedimento então é partir da expressão com ε e tentar obter uma expressão que envolva $x - p$ para compará-la com a expressão envolvendo δ. A função dada não é linear, então não é conveniente continuar escrevendo a inequação com módulo porque poderemos ter valores de δ diferentes à esquerda e à direita de p para os quais a condição vale.

Dessa forma,

$$\begin{gathered} |f(x) - f(p)| < \varepsilon \\ -\varepsilon < f(x) - f(p) < \varepsilon \\ -\varepsilon < x^2 - 2x - (p^2 - 2p) < \varepsilon \end{gathered}$$

O que nos interessa é ter $x - p$ no meio desta expressão. Vamos começar isolando o x. Para isso, começamos completando quadrados:

$$\begin{gathered} -\varepsilon < (x^2 - 2x + 1) - 1 - (p^2 - 2p) < \varepsilon \\ -\varepsilon < (x - 1)^2 - 1 - (p^2 - 2p) < \varepsilon \\ -\varepsilon < (x - 1)^2 - (p^2 - 2p + 1) < \varepsilon \\ -\varepsilon < (x - 1)^2 - (p - 1)^2 < \varepsilon \end{gathered}$$

e isolando a expressão que envolve x:

$$(p - 1)^2 - \varepsilon < (x - 1)^2 < (p - 1)^2 + \varepsilon.$$

Agora, podemos tomar a raiz quadrada[1] nas três partes:

$$\sqrt{(p-1)^2 - \varepsilon} < x - 1 < \sqrt{(p-1)^2 + \varepsilon}.$$

Para termos $x - p$ no centro dessa inequação, basta subtrair $p - 1$ nas três partes:

$$\begin{gathered}\sqrt{(p-1)^2 - \varepsilon} - (p-1) < x - p < \sqrt{(p-1)^2 + \varepsilon} - (p-1) \\ -\delta_- < x - p < \delta_+,\end{gathered}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}\delta_- &= (p-1) - \sqrt{(p-1)^2 - \varepsilon} \\ \delta_+ &= \sqrt{(p-1)^2 + \varepsilon} - (p-1).\end{aligned}$$

Note que δ_- e δ_+, da forma que definimos, são sempre positivos.

Com $x - p$ no centro da desigualdade, precisamos agora encontrar um valor de δ que torne essa expressão verdadeira. O mais simples que podemos considerar é

$$\delta = \min\left\{\delta_-, \delta+\right\},$$

ou seja, o que for o menor entre δ_- e δ_+. E assim garantimos que a condição do enunciado se aplica.

[1] Ao tomar esta raiz quadrada, introduzimos um módulo na inequação. Vamos supor que p é maior que a coordenada x do vértice da parábola. Se for menor, os sinais da inequação ficam trocados, mas o resultado é análogo.