Lista de exercícios 3
Vetores e Geometria Analítica

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: Sexta-feira 22/09/2017

1. Obtenha uma equação vetorial e equações paramétricas para as retas a seguir:
   (a) Passa pelo ponto $(6, -5, 2)$ e paralela ao vetor $\left(1, 3, -\frac{2}{3}\right)$.
   (b) Passa pelo ponto $(2; 2{,}4; 3{,}5)$ e é paralela ao vetor $3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$.
   (c) Passa pelo ponto $(0, 14, -10)$ e é paralela à reta $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6 - 3t \\ z = 3 + 9t \end{cases}$
   (d) Passa pelo ponto $(2, 1, 0)$ e é perpendicular tanto a $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ quanto a $\hat{\jmath} + \hat{k}$.

2. Obtenha as equações paramétricas e simétricas das seguintes retas:
   (a) Passa pela origem e pelo ponto $(4, 3, 1)$.
   (b) Passa pelos pontos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $(2, 1, -3)$.
   (c) Passa pelos pontos $(-8, 1, 4)$ e $(3, -2, 4)$.
   (d) Passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 2$.

3. A equação simétrica da reta, por exemplo $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+3}{-3}$, pode ser manipulada, isolando duas coordenadas em função de uma terceira, exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{1} &= \frac{y+4}{2} \\ 1(y+4) &= 2(x-2) \\ y+4 &= 2x-4 \\ y &= 2x+8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \frac{x-2}{1} &= \frac{z+3}{-3} \\ 1(z+3) &= -3(x-2) \\ z+3 &= -3x+6 \\ z &= -3x+3 \end{aligned}$$

   As duas últimas equações são as EQUAÇÕES REDUZIDAS da reta na variável x. Perceba que, dado um valor de x, o vetor $\mathbf{r}(x) = (x, 2x+8, -3x+3)$ representa um ponto da reta. Essa é uma forma comum de representar retas (e outras curvas e superfícies) em Cálculo. Nesse caso $\mathbf{r}(x)$ é uma FUNÇÃO VETORIAL cujo gráfico é a reta descrita pelas equações acima.

   Obtenha então as equações reduzidas na variável x das seguintes retas:
   (a) Passa pelo ponto $(4, 0, 3)$ e tem a direção de $\mathbf{v} = (2, 4, 5)$.
   (b) Passa pelos pontos $(1, 2, 3)$ e $(3, -1, -1)$

(c) Dada por $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 4t - 5 \end{cases}$

4. Obtenha uma equação para cada plano.

   (a) Passa pela origem é é perpendicular ao vetor $(1, -2, 5)$.

   (b) Passa pelo ponto $(5, 3, 5)$ com vetor normal $\mathbf{n} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$.

   (c) Paralelo ao plano $2x - 3y - z + 5 = 0$ e que passa por $(4, -21)$.

   (d) Passa pelo ponto $(2, 0, 1)$ e perpendicular à reta $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$.

5. Obtenha as equações paramétricas dos seguintes planos:

   (a) Passa pelo ponto $(2, 4, 6)$ e é paralelo ao plano $z = x + y$.

   (b) Passa pelos pontos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$.

   (c) Passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e contém a reta $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ (Dica: escolha dois pontos da reta para ter três pontos do plano).

6. (Winterle, Cap. 6, exemplo 3) A reta $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ é ortogonal a um plano que passa pelo ponto $(2, 1, -2)$. Determine a equação geral desse plano.

7. Determine se os planos a seguir são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. Nesse caso, obtenha o cosseno do ângulo entre eles. Se os planos forem paralelos calcule a distância entre eles. Senão, dê as equações paramétricas da interseção entre os planos.

   (a) $x + 4y - 3z = 1$ e $-3x + 6y + 7z = 0$

   (b) $2z = 4y - x$ e $3x - 12y + 6z = 1$

   (c) $x = y + z = 1$ e $x = y + z = 1$

   (d) $2x - 3y + 4z = 5$ e $x + 6y + 4z = 3$

   (e) $x = 4y - 2z$ e $8y = 1 + 2x + 4z$

8. (Boulos, Exercício Resolvido 15-4) Duas partículas realizam movimentos descritos pelas equações $\mathbf{r}_1(t) = (0, 0, 0) + t\,(1, 2, 4)$ e $\mathbf{r}_2(t) = (1, 0, -2) + t\,(-1, -1, -1)$. As trajetórias são concorrentes? Pode haver colisão entre essas partículas?

9. E a respeito de uma partícula com movimento descrito pela equação $\mathbf{r}_1(t) = (2, 1, 5) + t\,(2, -1, 3)$ e uma segunda partícula em movimento retilíneo uniforme que ocupa, no instante $t = -2$, a posição $\mathbf{r}_2(t = -2) = (-24, 14, -34)$ e, no instante $t = 3$, a posição $\mathbf{r}_2(t = 3) = (26, -11, 41)$?

10. Verifique se as retas dadas são concorrentes. Se sim, obtenha o ponto de interseção e uma equação geral no plano determinado por elas.

    (a) $\mathbf{r}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{r}_2(\mu) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

    (b) $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 + 4\mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = -2 + 6\mu \end{cases}$

    (c) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-6}{2} = z - 1$ e $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z+4}{8}$

11. Calcule a distância entre o ponto e a reta dados.

    (a) $(4, 1, -2)$ e $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$

    (b) $(0, 1, 3)$ e $\begin{cases} x = 2t \\ y = 6 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

12. Calcule a distância entre o ponto e o plano dados.

    (a) $(1, -2, 4)$ e $3x + 2y + 6 \ = 5$

    (b) $(-6, 3, 5)$ e $x - 2y - 4z = 8$

13. (Boulos, Exercício Resolvido 20-15) Obtenha uma reta que contém o ponto $(1, 1, 2)$, é paralela ao plano $x - 2y + 2z - 4 = 0$ e dista $\frac{1}{\sqrt{2}}$ da reta $\mathbf{r}(t) = (3, 1, 1) + t\,(4, 1, -1)$