Lista de exercícios 2
Vetores e Geometria Analítica

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: Sexta-feira 01/09/2017

1. Obtenha $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\|\vec{a}\|$ e $\left\|\vec{b} - \vec{a}\right\|$.

   (a) $\vec{a} = 5\hat{\imath} - 12\hat{\jmath}$; $\vec{b} = -3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$

   (b) $\vec{a} = 4\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$; $\vec{b} = 1\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$

   (c) $\vec{a} = 1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$; $\vec{b} = -2\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} + 5\hat{k}$

   (d) $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{\jmath} - 1\hat{k}$

2. Em cada cada um dos casos abaixo, decida se o triângulo ABC tem um ângulo obtuso, um ângulo reto ou se seus três ângulos são agudos:

   (a) $A = (0, 0)$, $B = (3, 152)$, $C = (-45, 1)$.

   (b) $A = (1, 2)$, $B = (2, -3)$, $C = (4, 8)$.

   (c) $A = (2, 3)$, $B = (6, 7)$, $C = (3, 10)$.

   (d) $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 10, 5)$, $C = (-3, 5, 7)$.

3. O triângulo ABC, com $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (0, y)$, é equilátero. Quais os valores possíveis de y? Nota: os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos 60°.

4. Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 1)$. Qual é o ponto C de abcissa 3 tal que $AC \perp AB$?

5. Quais das expressões a seguir fazem sentido? Quais não têm sentido? Explique.

   (a) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

   (b) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c}$

   (c) $|\vec{a}| \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

   (d) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

   (e) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c}$

   (f) $|\vec{a}| \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

6. Obtenha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$:

   (a) $\mathbf{a} = (-2, 3)$; $\mathbf{b} = (0{,}7; 1{,}2)$

   (b) $\mathbf{a} = \left(-2, \frac{1}{3}\right)$; $\mathbf{b} = (-5; 12)$

   (c) $\mathbf{a} = (6, -2, 3)$; $\mathbf{b} = (2, 5, -1)$

   (d) $\mathbf{a} = (p, -p, 2p)$; $\mathbf{b} = (2q, q - q)$

   (e) $\mathbf{a} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$; $\mathbf{b} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$

   (f) $\mathbf{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$; $\mathbf{b} = 4\hat{\imath} + 5\hat{k}$

7. Dados os vetores $\mathbf{u} = (2, -3, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1, 4)$, calcular:

   (a) $2\mathbf{u} \cdot (-\mathbf{v})$

   (b) $(\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - 2\mathbf{u})$

   (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$

   (d) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})$

8. Sejam os vetores $\mathbf{u} = (2, a, -1)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$ e $\mathbf{w} = (2a - 1, -2, 4)$. Determine o valor de a de forma que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

9. Obtenha a componente e a projeção do vetor **b** sobre **a**:

   (a) $\mathbf{a} = (-5, 12)$; $\mathbf{b} = (4, 6)$

   (b) $\mathbf{a} = (3, 6, -2)$; $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$

   (c) $\mathbf{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k}$; $\mathbf{b} = \hat{\jmath} + \frac{1}{2}\hat{k}$

   (d) $\mathbf{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$; $\mathbf{b} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$

10. (a) Obtenha o ângulo entre a diagonal de um cubo e um dos lados.

    (b) Obtenha o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma das faces.

11. Desigualdade de Cauchy-Schwarz Utilize a definição geométrica do produto escalar para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \, .$$

12. A desigualdade triangular de vetores é

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

   (a) Dê uma interpretação geométrica para essa desigualdade.

   (b) Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz, acima, para provar a desigualdede triangular. (Dica: $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$)

13. Qual o valor de α para que os vetores $\mathbf{a} = \alpha\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ e $\mathbf{b} = 2\hat{\imath} + (1 - 2\alpha)\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ sejam ortogonais?

14. Diga se cada expressão a seguir tem sentido. Se não, explique por quê. Se tiver, diga se é um vetor ou um escalar.

   (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

   (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

   (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

   (d) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

   (e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$

   (f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

15. Obtenha o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifique que ele é ortogonal tanto a **a** quanto a **b**.

   (a) $\mathbf{a} = (6, 0, -2)$; $\mathbf{b} = (0, 8, 0)$

   (b) $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$; $\mathbf{b} = (2, 4, 6)$

   (c) $\mathbf{a} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$; $\mathbf{b} = -\hat{\imath} + 5\hat{k}$

   (d) $\mathbf{a} = t\hat{\imath} + \cos(t)\hat{\jmath} + \operatorname{sen}(t)\hat{k}$;
   $\mathbf{b} = \hat{\imath} - \operatorname{sen}(t)\hat{\jmath} + \cos(t)\hat{k}$

   (e) $\mathbf{a} = \left(t, 1, \frac{1}{t}\right)$; $\mathbf{b} = \left(t^2, t^2, 1\right)$

16. Utilizando-se apenas das propriedades do produto vetorial, encontre os vetores:

   (a) $(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) \times \hat{k}$

   (b) $\hat{k} \times (\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})$

   (c) $(\hat{\jmath} - \hat{k}) \times (\hat{k} - \hat{\imath})$

   (d) $(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \times (\hat{\imath} - \hat{\jmath})$

17. Dados os vetores $\mathbf{u} = (3, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (-4, 1, 3)$ e $\mathbf{w} = (1, 2, 0)$, determine $\mathbf{x}$ de forma que $\mathbf{x} \perp \mathbf{w}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

18. Sejam $\mathbf{a} = (4, 1, 2)$ e $\mathbf{b} = (-1.1, 0)$ e $\mathbf{c} - (0, 0, -4)$. Verifique que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

19. Determine dois vetores unitários ortogonais tanto a $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ quanto a $2\hat{\imath} + \hat{k}$.

20. Mostre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$ para todos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em $\mathbb{V}^3$.

21. Dado o vetor $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)$, determine $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ de forma que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sejam mutuamente ortogonais.

22. Utilize o produto misto para verificar se os vetores $\mathbf{u} = \hat{\imath}+5\hat{\jmath}-2\hat{k}$, $\mathbf{v} = 3\hat{\imath}-\hat{\jmath}$ e $\mathbf{w} = 5\hat{\imath}+9\hat{\jmath}-4\hat{k}$ são coplanares.

23. Se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores não coplanares, sejam

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \qquad \mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \qquad \mathbf{k}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}.$$

Esses vetores aparecem no estudo de cristalografia. O paralelepípedo com vértices $\mathbf{v}_i$ é a *célula unitária* do cristal. Vetores da forma $n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + n_3\mathbf{v}_3$ onde cada n_i é inteiro, formam uma *rede*: átomos cujas posições difiram por um vetor dessa forma são idênticos na estrutura cristalina. Vetores da forma $n_1\mathbf{k}_1 + n_2\mathbf{k}_2 + n_3\mathbf{k}_3$ onde cada n_i é inteiro formam a *rede recíproca* do cristal, que costuma descrever a ocupação eletrônica.

   (a) Mostre que $\mathbf{k}_i$ é ortogonal a $\mathbf{v}_j$ se $i \neq j$.

   (b) Mostre que $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

   (c) Mostre que $\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) = \frac{1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$